

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Physique des ondes

PC-PSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

L. SARTRE

Nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyrighted material

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique des ondes

PC-PSI

LAURENT SARTRE

Professeur en classes préparatoires scientifiques
au lycée Michel Montaigne à Bordeaux

This One
CZKO-3DX-QGUG

Bréal éditions

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques 2e année

- Algèbre et Géométrique / PC
- Algèbre et Géométrie / PSI
- Analyse / PC
- Analyse / PSI

Physique 2e année

- Mécanique / MP - PC
- Mécanique des fluides / PC - PSI
- Électromagnétisme / PC - PSI
- Physique des ondes / PC - PSI
- Électrotechique / PSI
- Électronique / PSI
- Optique / MP - PC - PSI - PT
- Thermodynamique / PC - PSI

Chimie 2e année

- Chimie organique / PC
- Thermodynamique - Matériaux / PC
- Chimie / PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques / PC - PSI
- Physique / PC
- Physique / PSI

Maquette et couverture : Sophie Martinet
Réalisation : Soft Office

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
Dépôt légal : août 2004.
ISBN 2 7495 0401 5

Copyrighted material

Avant-propos

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année des filières PC et PSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.

- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.

- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ☼ ou ⚠). La plupart des énoncés proposés ont été tirés de sujets de concours.

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de PC et PSI disposeront, en physique des ondes, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette seconde année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à passer avec réussite leurs épreuves et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse **infos@editions-breal.fr**.

L'éditeur et les auteurs

Copyrighted material

Sommaire

Chapitre 1 ■ Phénomènes de propagation non dispersifs 5

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 21
Exercices : énoncés, solutions 29

Chapitre 2 ■ Ondes sonores dans les fluides 51

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 67
Exercices : énoncés, solutions 73

Chapitre 3 ■ Ondes électromagnétiques dans le vide 93

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 108
Exercices : énoncés, solutions 114

Chapitre 4 ■ Phénomènes linéaires dispersifs 133

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 151
Exercices : énoncés, solutions 157

Chapitre 5 ■ Ondes électromagnétiques dans les diélectriques (filière PC) 186

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 197
Exercices : énoncés, solutions 201

Index 223

Copyrighted material

CHAPITRE

1 Phénomènes de propagation non dispersifs

Ouverture

Quiconque a lâché un caillou dans l'eau a observé l'apparition de vagues circulaires dont le diamètre croît avec le temps. On parle de propagation d'une déformation de la surface de l'eau. Ce phénomène physique, qualifié d'ondulatoire, peut revêtir bien des apparences tant visibles, comme dans l'exemple précédent, qu'invisibles, dans le cas d'ondes sonores ou d'ondes électromagnétiques. Malgré la diversité des phénomènes ondulatoires, la nature même de la propagation des ondes peut être appréhendée à l'aide de modèles physiques simples.

Ce chapitre introduit ces notions en s'appuyant sur des situations physiques unidimensionnelles. L'équation d'onde obtenue est analysée pour mettre en évidence l'existence d'un couplage spatio-temporel qui rend compte d'une propagation.

Plan du chapitre 1

A. Exemples d'introduction

1. La chaîne d'oscillateurs 6
2. La corde vibrante 8

B. Équation de d'Alembert

1. Solution générale de l'équation de d'Alembert 9
2. Ondes progressives planes harmoniques 12
3. Ondes stationnaires 14

C. Applications aux cordes

1. Corde vibrante fixée à ses extrémités. 16
2. Corde de Melde. 19

Méthodes 21

Exercices. 29

Copyright material

A. Exemples d'introduction

A.1. La chaîne d'oscillateurs

A.1.1. Position du problème

Une collection d'atomes identiques de masse m forment une chaîne linéaire sur un axe horizontal Ox. À l'équilibre, on admet que la distance entre deux atomes consécutifs est constante et vaut a. Une perturbation longitudinale modifie cet équilibre. L'interaction entre les atomes propage alors cette perturbation de proche en proche le long de la chaîne. On suppose que cette perturbation est suffisamment « forte » pour faire sentir son influence à grande distance sur la chaîne atomique, mais qu'elle est également suffisamment « faible » pour ne pas bouleverser complètement la structure. Dans ce cas, l'interaction entre les atomes peut être modélisée par une force de rappel de raideur k, identique pour tous les atomes et limitée aux plus proches voisins. La chaîne atomique est ainsi modélisée par une chaîne d'oscillateurs linéaires.

Outre son intérêt académique, cet exemple classique décrit simplement les phénomènes de propagation dans un cristal, ou encore la propagation du son dans un milieu matériel[1]. Bien que le caractère infini de la chaîne d'oscillateurs puisse sembler peu physique, si l'on néglige les effets de bord, ce modèle permet d'introduire la notion de phénomène ondulatoire associé à un système discret puis, par passage à la limite, à un système continu.

1. Cette étude constitue l'objet du chapitre 2.

A.1.2. Mise en équation

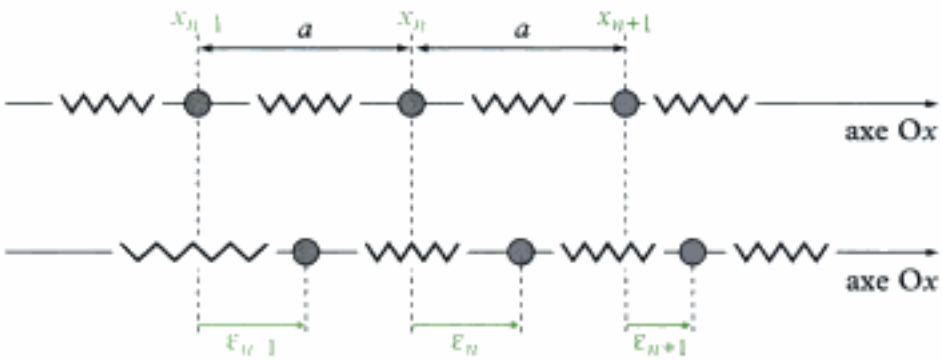


Fig. 1 - Perturbation le long d'une chaîne d'oscillateurs linéaires.

Notons $\varepsilon_n(t)$ l'écart de l'atome n à l'instant t sur l'axe Ox par rapport à sa position d'équilibre (fig. 1). Pour cet atome, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe Ox s'écrit[2] :

$$m\ddot{\varepsilon}_n = \underbrace{k(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)}_{\substack{\text{force de rappel}\\ \text{exercée par}\\ \text{l'atome } n+1}} \underbrace{-k(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}_{\substack{\text{force de rappel}\\ \text{exercée par}\\ \text{l'atome } n-1}},$$

2. Dans toute la suite, on supposera que le référentiel d'étude est galiléen et que l'on peut négliger le poids des atomes.

que l'on met sous la forme :

$$\ddot{\varepsilon}_n + \omega_0^2(2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n+1}) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

où $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ est la pulsation propre de chaque oscillateur.

Copyrighted material

Cette équation montre que le déplacement de l'atome n dépend des déplacements des atomes $n-1$ et $n+1$. De manière générale, le comportement d'un atome dépend de celui de ses plus proches voisins. Cette propriété est caractéristique de la propagation de proche en proche d'une perturbation. On dit alors qu'**une onde se propage le long de la chaîne**.

A.1.3. Limite continue

Désignons par x_n la position d'équilibre de l'atome n sur l'axe Ox, puis construisons une fonction ψ définie en tout point x_n et à chaque instant t par l'écart à la position d'équilibre :

$$\psi(x_n,t)=\varepsilon_n(t)\,.$$

Dans le cas où la distance $a=x_{n+1}-x_n$ entre deux atomes consécutifs reste petite devant la distance caractéristique du phénomène ondulatoire[3] (hypothèse que nous supposerons vérifiée), et en admettant que la fonction ψ vérifie les conditions mathématiques requises, on peut écrire les développements suivants à l'ordre 2 en a :

$$\begin{cases}\varepsilon_{n+1}(t)=\psi(x_n+a,t)=\psi(x_n,t)+a\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x_n,t)+\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(x_n,t)\\ \varepsilon_{n-1}(t)=\psi(x_n-a,t)=\psi(x_n,t)-a\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x_n,t)+\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(x_n,t)\end{cases}.$$

3. La distance caractéristique de variation d'un phénomène ondulatoire est appelée longueur d'onde. Dans l'étude des phénomènes sonores, elle est de l'ordre du mètre, donc bien plus grande que la distance entre atomes (environ quelques angströms).

En sommant ces deux égalités, on obtient :

$$\varepsilon_{n+1}(t)+\varepsilon_{n-1}(t)=2\psi(x_n,t)+a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(x_n,t),$$

d'où :

$$2\varepsilon_n(t)-\varepsilon_{n-1}(t)-\varepsilon_{n+1}(t)=2\psi(x_n,t)-\left[2\psi(x_n,t)+a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(x_n,t)\right]=-a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(x_n,t).$$

Par ailleurs, on a immédiatement :

$$\ddot{\varepsilon}_n(t)=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)(x_n,t)\,.$$

D'après (1), la fonction ψ vérifie donc l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-a^2\omega_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\,.$$

Loi 1

L'évolution de la perturbation dans une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs linéaires est caractérisée par **l'équation de d'Alembert** :

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0}\,.$$

Cette équation décrit le phénomène de propagation d'une onde dans un milieu continu. c est la vitesse de propagation de l'onde et s'exprime en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Copyrighted material

Dans l'exemple traité, l'onde se propage dans la même direction que les déplacements des atomes : on dit que l'onde est **longitudinale**. La vitesse de propagation de l'onde vaut[4] :

$$c = a\omega_0 = a\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

4. Dans les matériaux de masse volumique ρ, cette relation, par passage à la limite continue, s'écrit sous la forme :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,,$$

où E est le module d'Young du matériau, caractéristique mécanique de ce dernier, et s'exprime en Pa.

A.2. La corde vibrante

A.2.1. Position du problème

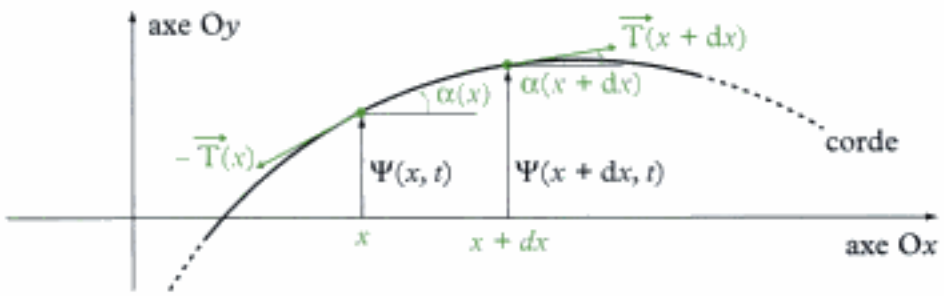


Fig. 2 - Corde vibrante.

On s'intéresse à présent aux petits mouvements transversaux d'un corde sans raideur, de masse linéique μ (fig.2). À l'équilibre, la corde est horizontale suivant l'axe Ox. Lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre, on admet que chacun de ses points conserve son abscisse x initiale. L'écart à la position d'équilibre à l'instant t est noté $\psi(x, t)$. Enfin, on suppose que les déplacements de la corde restent « petits », ce qui entraîne que les angles α restent petits et que :

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| \ll 1.$$

A.2.2. Mise en équation

En négligeant le poids de la corde devant sa tension, ainsi que d'éventuels frottements avec l'air, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de corde compris entre les abscisses x et x+dx s'écrit[5] :

$$\mu dx\,\vec{a} = \underbrace{\vec{T}(x+dx)}_{\substack{\text{action exercée}\\ \text{par la partie droite}\\ \text{de la corde}}} \underbrace{-\vec{T}(x)}_{\substack{\text{action exercée}\\ \text{par la partie gauche}\\ \text{de la corde}}},$$

5. Dans toute la suite, on supposera que le référentiel est galiléen.

avec $\vec{a} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\vec{e}_y$ car la corde se déplace verticalement. À l'ordre 1 en dx, il vient :

$$\mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\vec{e}_y \approx \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx\,.$$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy du repère, on obtient respectivement :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \quad \textbf{(1)} \qquad \text{et} \qquad \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad \textbf{(2)}\,.$$

L'angle α restant faible, on a : $\cos\alpha \approx 1$ et $\sin\alpha \approx \alpha$. Comme $T_x = T\cos\alpha$ et $T_y = T\sin\alpha$, on peut alors écrire, à l'ordre 1 en α : $T_x = T$ et $T_y = T\alpha$. Ainsi, l'équation (1) donne T = cte, que l'on peut injecter dans l'équation (2) :

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial (T\alpha)}{\partial x} = T\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,.$$

Copyrighted material

Enfin, comme $\tan\alpha = \alpha$ à l'ordre 1 en α et que $\tan\alpha = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ [6], on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} \approx \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Le mouvement de tout point de la corde est donc régi par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.$$

Loi 2

L'évolution des petits mouvements transversaux d'une corde sans raideur est caractérisée par **l'équation de d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.$$

Cette équation décrit le phénomène de propagation d'une onde le long de la corde. c est la vitesse de propagation de l'onde et s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

Dans l'exemple traité, l'onde se propage le long de l'axe Ox, mais la grandeur physique qui caractérise la déformation de la corde évolue le long de l'axe Oy perpendiculairement à la direction de propagation : on dit que l'onde est **transversale**. La vitesse de propagation de l'onde le long de la corde vaut :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

B. Équation de d'Alembert

B.1. Solution générale de l'équation de d'Alembert

B.1.1. Préliminaires

Avant de rechercher les solutions de l'équation de d'Alembert, on peut analyser quelques-unes de ses propriétés.

• On remarque tout d'abord que l'équation est linéaire. Cela signifie que si $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$ sont des solutions de l'équation de d'Alembert, alors toute combinaison linéaire $\lambda_1\psi_1(x, t) + \lambda_2\psi_2(x, t)$, où λ_1 et λ_2 sont des réels, est également solution : c'est le principe de superposition. Associé à l'analyse de Fourier, il est assez systématiquement appliqué dans la recherche de solutions à l'équation de d'Alembert.

Théorème 1

Principe de superposition

La linéarité de l'équation de d'Alembert entraîne que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est encore une solution.

• On remarque ensuite que l'équation de d'Alembert ne fait intervenir que des dérivées partielles d'ordre 2. Si $\psi(x, t)$ est une solution de l'équation, alors $\phi(x, t) = \psi(-x, t)$ et $\varphi(x, t) = \psi(x, -t)$ sont également des solutions. Pour montrer ce résultat, on utilise le théorème de dérivation des fonctions composées [7], généralisé à des fonctions de plusieurs variables.

6. C'est la définition de la dérivée d'une fonction.

7. La dérivée d'une fonction composée $g = f \circ u$ s'écrit :

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x).$$

Ainsi, avec $u(x) = -x$, on a :

$$g'(x) = -f'\big(-x\big).$$

et en dérivant une seconde fois :

$$g''(x) = f''\big(-x\big).$$

Copyrighted material

B.1.2. Ondes progressives dans le sens de x croissant

• Considérons une fonction $\psi(x, t)$ des variables x et t définie par la fonction composée :

$$\psi(x,t) = f(x - ct) .$$

On peut exprimer les dérivées partielles de ψ en fonction des dérivées de f :

– à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = f'(x-ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -c f'(x-ct) ;$$

– à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) = f''(x-ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 f''(x-ct) .$$

On remarque alors que ψ est une solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) = c^2 f''(x-ct) - c^2 f''(x-ct) = 0 .$$

Une telle solution ne peut pas constituer la solution générale de l'équation de d'Alembert car elle n'est pas invariante par renversement du temps et de l'espace. Elle ne peut donc constituer qu'un «morceau» de la solution[8].

• Cette solution admet une interprétation physique simple. Sur la figure 3, on a représenté une corde à un instant t quelconque et à un instant ultérieur $t + \delta t$. La perturbation à l'instant $t + \delta t$ se déduit de la perturbation à l'instant t par une translation de longueur $c\delta t$ le long de l'axe Ox. En effet :

$$\psi(x, t+\delta t) = f\left[x - c\left(t+\delta t\right)\right] = f\left[x - c\,\delta t - ct\right] = \psi(x - c\delta t, t) .$$

La solution ψ décrit donc la propagation d'une onde le long de l'axe Ox dans le sens des valeurs croissantes de x. c s'interprète alors comme la vitesse de propagation de l'onde.

8. En fait, ψ est solution d'une équation d'onde plus simple que l'équation de d'Alembert. Les calculs de dérivées partielles montrent en effet que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 .$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire qui ne présente pas les symétries de l'équation de d'Alembert.

Propriété 1

La fonction $\psi(x,t) = f(x - ct)$, solution de l'équation de d'Alembert, décrit une **onde progressive se propageant dans le sens de x croissant** à la célérité c.

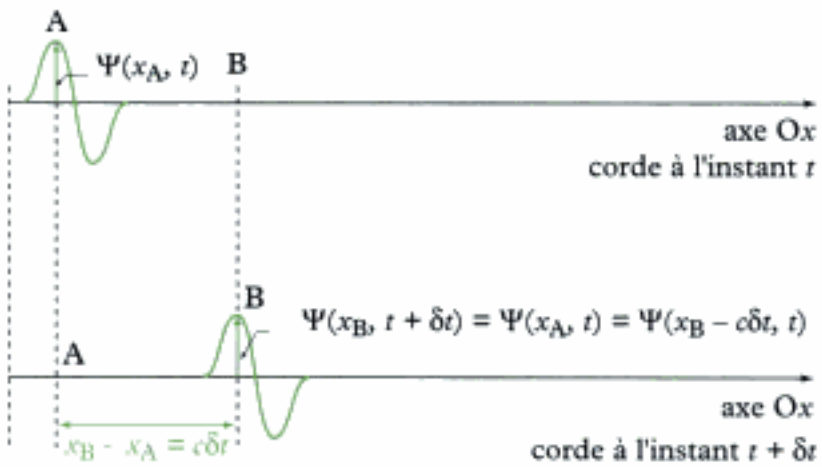


Fig. 3 - Onde progressive dans le sens de x croissant à deux instants.

Copyrighted material

B.1.3. Ondes progressives dans le sens de x décroissant

Considérons à présent une fonction $\psi(x, t)$ des variables x et t définie par : $\psi(x, t) = g(x + ct)$. On peut reprendre la même analyse que précédemment en remplaçant simplement c par $-c$. Cette fonction est par conséquent encore une solution de l'équation de d'Alembert[9] et décrit la propagation d'une onde le long de l'axe Ox dans le sens des valeurs décroissantes de x.

9. En fait, ψ est solution d'une équation d'onde de la forme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 .$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire qui ne présente pas les symétries de l'équation de d'Alembert.

Propriété 2

La fonction $\psi(x,t) = g(x+ct)$, solution de l'équation de d'Alembert, décrit une **onde progressive se propageant dans le sens de x décroissant** à la vitesse c.

B.1.4. Solution générale

D'après le principe de superposition, toute fonction $\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est encore une solution de l'équation de d'Alembert. Il s'agit de la solution la plus générale de cette équation. Elle est la superposition d'une onde progressive dans le sens de x croissant et d'une onde progressive dans le sens de x décroissant. La propagation de l'onde se fait à la même vitesse c dans les deux sens.

On peut vérifier qu'une telle solution est effectivement la solution la plus générale. En posant $u = x - ct$ et $v = x + ct$, on remarque que :

$$-2c\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad 2c\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} ,$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) = -4c^2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} .$$

En notant $\psi(x, t) = s(u, v)$, l'équation de d'Alembert s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v} = 0 .$$

En intégrant par rapport à u, il vient :

$$\frac{\partial s}{\partial v}(u,v) = \mathrm{G}(v),$$

puis en intégrant par rapport à v, il vient :

$$s(u, v) = f(u) + g(v),$$

soit en revenant aux variables x et t :

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Propriété 3

La **solution générale de l'équation de d'Alembert** à une dimension est la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens opposé à la même vitesse c :

$$\psi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$ [10].

10. Il est intéressant de remarquer que $\psi(-x, t)$ et $\psi(x, -t)$ sont encore des solutions. Ce résultat est évident à la vue de l'expression de la solution générale.

Copyrighted material

Une onde progressive dans le sens de x décroissant est également appelée *onde régressive*. L'existence d'une telle onde est généralement liée à la possibilité d'un retour de l'onde progressive initialement dans le sens de x croissant, par exemple après réflexion sur un obstacle. En l'absence d'obstacle ou de source émettrice, la solution est une *onde progressive libre*, qui se propage dans un seul sens. Dans toute la suite, on parlera d'onde progressive pour désigner indifféremment une onde qui se propage dans le sens de x croissant ou dans le sens de x décroissant.

B.1.5. Onde plane

Les solutions de l'équation de d'Alembert déterminées jusqu'à présent ne dépendent que d'une seule coordonnée spatiale x car elles décrivent un phénomène unidimensionnel. De telles solutions existent aussi dans l'espace tridimensionnel. Une solution de la forme $f(x-ct)$décrit une onde progressive dans le sens de x croissant, indépendamment des autres coordonnées spatiales y et z. L'onde prend donc la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation : on dit alors que l'onde est **plane**.

Propriété 4

Dans l'espace à trois dimensions, une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :

$$\psi(\mathbf{M},t) = f(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OM}} - ct) + g(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OM}} + ct)$$

décrit une **onde plane se propageant dans la direction du vecteur directeur unitaire** $\vec{u}$. L'onde $f(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} - ct)$ se propage dans le sens de $\vec{u}$, l'onde $g(\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} + ct)$ dans le sens opposé à $\vec{u}$.

B.2. Ondes progressives planes harmoniques

B.2.1. Description

Définition 1

Une **onde progressive plane harmonique**[11] (ou OPPH) se propageant dans le sens de x croissant a la forme :

$$\psi(x,t) = \psi_m \cos\left(\omega t - kx + \phi\right)$$

ψ_m amplitude (dimension de ψ)
ω pulsation ($\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$)
k module du vecteur d'onde ($\mathrm{rad\cdot m^{-1}}$)
ϕ phase à l'origine (rad)

11. On parle aussi d'onde plane progressive monochromatique ou sinusoïdale.

C'est encore une solution de l'équation de d'Alembert à condition que la pulsation ω et le vecteur d'onde k vérifient la **relation de dispersion**[12] :

$$\boxed{-\omega^2 + k^2c^2 = 0}, \quad \text{car} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi \ .$$

12. Nous donnerons un sens physique à cette relation dans le chapitre 4.

D'après cette relation, l'onde progressive plane harmonique peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\psi(x,t) = \psi_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi\right) \quad \text{ou} \quad \psi(x,t) = \psi_m \cos\left(k\left(x - ct\right) + \phi\right) \ .$$

Une telle onde présente une **double périodicité** spatiale et temporelle. En effet, il existe deux réels λ et T tels que (fig.4) :

$$\psi(x+\lambda,t)=\psi(x,t) \quad \text{et} \quad \psi(x,t+T)=\psi(x,t)\ .$$

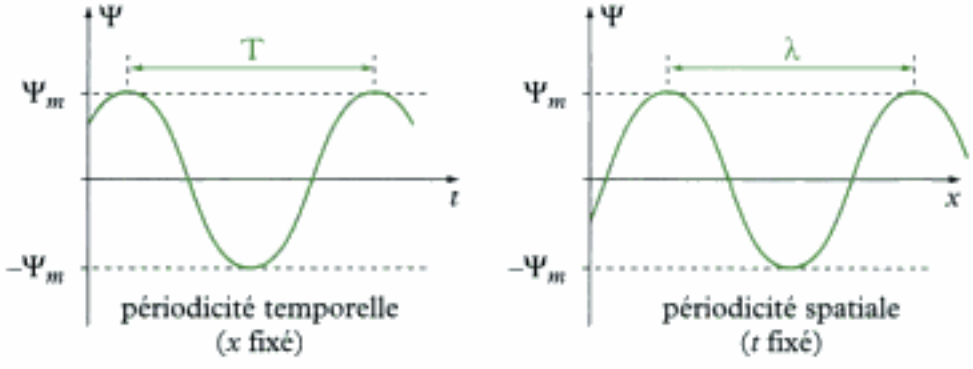


Fig. 4 - Double périodicité d'une OPPH.

Une OPPH présente une double périodicité, spatiale et temporelle. La **longueur d'onde** λ (en m) et la **période T** (en s) vérifient les relations :

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \quad \text{et} \quad T=\frac{2\pi}{\omega}\ .$$

On définit aussi le nombre d'onde σ (en m^{-1}), inverse de la longueur d'onde, et la fréquence ν (en Hz), inverse de la période :

$$\sigma=\frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \nu=\frac{1}{T}\ .$$

Une onde plane progressive harmonique peut ainsi s'écrire indifféremment :

$$\psi(x,t)=\psi_m\cos(\omega t-kx+\phi)=\psi_m\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi\right)=\psi_m\cos\left(2\pi(\nu t-\sigma x)+\phi\right).$$

B.2.2. Représentation complexe

En représentation complexe, une OPPH $\psi(x,t)=\psi_m\cos(\omega t-kx+\phi)$ s'écrit :

$$\underline{\psi}(x,t)=\underline{\psi}_m e^{j(\omega t-kx+\phi)}\ .$$

L'**onde réelle** correspond alors à la partie réelle de sa représentation complexe :

$$\psi(x,t)=\mathrm{Re}\left[\underline{\psi}(x,t)\right].$$

Cette expression peut également se mettre sous la forme :

$$\underline{\psi}(x,t)=\underline{\psi}_m e^{j(\omega t-kx)},\ \text{avec}\ \ \underline{\psi}_m=\psi_m e^{j\phi}\ \text{amplitude complexe.}$$

L'intérêt de la représentation complexe réside dans la simplicité des calculs qui découle de son utilisation. Cependant, elle ne peut être utilisée que si le phénomène étudié est décrit par une équation d'évolution linéaire, comme c'est le cas pour l'équation de d'Alembert.

Copyrighted material

B.2.3. Intérêt de l'OPPH

L'analyse de Fourier est un outil très puissant pour décrire les solutions de problèmes linéaires. L'équation de d'Alembert entre dans cette catégorie. Ainsi, si $\psi(x, t)$ est une solution de l'équation de d'Alembert, l'analyse de Fourier montre que cette solution peut s'écrire comme la combinaison linéaire d'une infinité d'OPPH de la forme :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\Psi}_m(\omega)e^{j(\omega t - k(\omega)x)},$$

où l'amplitude complexe $\underline{\Psi}_m$ et le module k du vecteur d'onde sont en général des fonctions de la pulsation ω. Ainsi, on a[13] :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\Psi}_m(\omega)e^{j(\omega t - k(\omega)x)}\mathrm{d}\omega .$$

Par conséquent, connaître les OPPH solutions de l'équation de d'Alembert, c'est connaître les solutions génératrices de toute solution générale. Il suffit alors de connaître la relation donnant les amplitudes complexes en fonction de la pulsation ω.

13. Cette approche a déjà été utilisée en électrocinétique pour décrire le comportement des montages en régime sinusoïdal permanent. Déterminer la fonction de transfert H, c'est déterminer l'expression de la fonction qui permet de caractériser le montage en termes de signaux harmoniques complexes. En notant $\underline{e}(t)$ la représentation complexe de la tension d'entrée du montage, la représentation complexe de la tension de sortie $\underline{s}(t)$ est alors :

$$\underline{s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underline{H}(\omega)\, e_m}_{\Psi_m(\omega)} e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega .$$

B.3. Ondes stationnaires

B.3.1. Méthode de séparation des variables

Les ondes stationnaires sont des solutions de l'équation de d'Alembert obtenues par la **méthode de séparation des variables**. Celle-ci consiste à chercher des solutions sous la forme :

$$\psi(x,t) = \mathrm{X}(x)\mathrm{T}(t).$$

On a alors, en dérivant deux fois par rapport à chaque variable :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathrm{X}(x)\mathrm{T}''(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \mathrm{X}''(x)\mathrm{T}(t) .$$

L'équation de d'Alembert peut donc s'écrire :

$$\mathrm{T}''(t)\mathrm{X}(x) - c^2\mathrm{T}(t)\mathrm{X}''(x) = 0 ,$$

soit, en supposant que les fonctions T et X ne sont pas identiquement nulles :

$$\frac{\mathrm{T}''(t)}{\mathrm{T}(t)} = c^2\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)} .$$

Cette égalité étant vraie pour toutes valeurs de x et de t, les deux membres de l'égalité sont égaux à une constante réelle α[14]. Deux cas se présentent alors.

14. Le membre de gauche ne dépend que de la variable t et celui de droite que de la variable x. Une fonction de t et une fonction de x égales quelles que soient les valeurs des variables sont nécessairement constantes.

– Si $\alpha > 0$, on peut écrire : $\alpha = k^2$. La fonction X est alors de la forme :

$$\mathrm{X}(x) = \mathrm{A}e^{-kx} + \mathrm{B}e^{kx} .$$

Cette solution présente peu d'intérêt physique en raison de la présence d'un terme divergent (e^{kx}) et d'un terme associé à un régime transitoire (e^{-kx}) : nous la rejetons donc.

– Si $\alpha < 0$, on peut écrire : $\alpha = -k^2$. La fonction X est alors de la forme :

$$\mathrm{X}(x) = \mathrm{X}_m\cos(kx + \phi_0) .$$

De même : $\mathrm{T}(t) = \mathrm{T}_m\cos(\omega t + \varphi_0)$, avec $\omega = kc$.

Copyrighted material

Finalement, la solution physiquement acceptable s'écrit :

$$\psi(x,t) = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0)\,.$$

Une **onde stationnaire plane harmonique** est une solution de l'équation de d'Alembert obtenue par la méthode de séparation des variables :

$$\boldsymbol{\psi(x,t) = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0)}\,.$$

B.3.2. Propriétés des ondes stationnaires

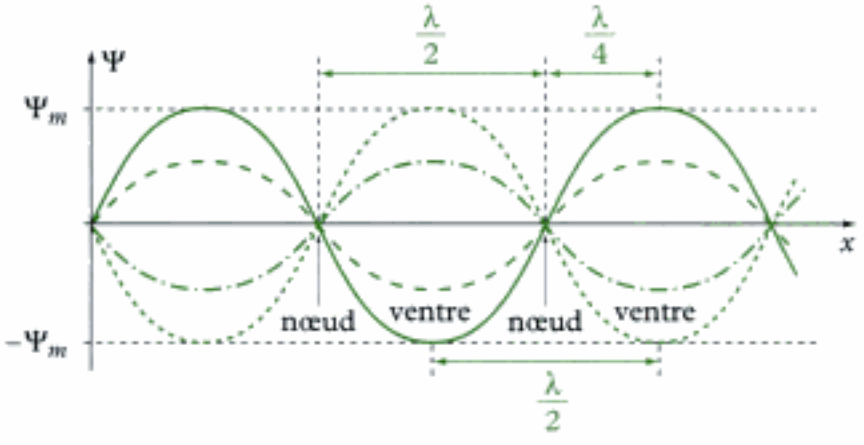


Fig. 5 - Onde stationnaire à différents instants.

La solution déterminée au paragraphe précédent est appelée onde stationnaire en raison de **l'absence de propagation** qui la caractérise. Pour une abscisse x fixée, l'onde «oscille sur place» en fonction du temps. La figure 5 représente une telle solution à différents instants.

– Les positions dont l'abscisse vérifie $kx + \phi_0 = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, appelées **nœuds**, sont immobiles. Deux nœuds consécutifs sont séparés d'une distance égale à $\lambda/2$[15].

15. Par définition de la longueur d'onde, on a la correspondance : $\lambda \leftrightarrow 2\pi$.

– Les positions dont l'abscisse vérifie $kx + \phi_0 = 0 \pmod{\pi}$, appelées **ventres**, correspondent aux extrema de ψ. Deux ventres consécutifs sont séparés d'une distance égale à $\lambda/2$. Un ventre et un nœud consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

B.3.3. Relation entre ondes progressives et stationnaires

Nous avons établi précédemment la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert en termes d'ondes progressives. Comment des ondes stationnaires peuvent-elles constituer des solutions de cette équation alors qu'elles ne correspondent pas à une propagation? La réponse est contenue dans la formule de linéarisation d'un produit de cosinus[16], qui permet de passer d'une onde stationnaire plane harmonique à une OPPH.

16. On rappelle que : $\cos p \cos q = \dfrac{1}{2}\left(\cos(p+q) + \cos(p-q)\right)$.

– Une onde stationnaire plane harmonique s'écrit ainsi comme la somme de deux OPPH de même amplitude :

$$\psi_{\text{stationnaire}}(x,t) = \begin{cases} \psi_m \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0) \\ \dfrac{\psi_m}{2}\cos(\omega t - kx + \varphi_0 - \phi_0) + \dfrac{\psi_m}{2}\cos(\omega t + kx + \varphi_0 + \phi_0)\,. \end{cases}$$

Copyrighted material

– De même, une OPPH s'écrit comme la somme de deux ondes stationnaires planes harmoniques en quadrature de phase :

$$\psi_{\text{progressive}}(x,t) = \begin{cases} \psi_m \cos(\omega t - kx + \phi) \\ \psi_m \cos(\omega t + \phi)\cos(kx) + \psi_m \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

> Toute onde stationnaire plane harmonique peut s'écrire comme la somme de deux OPPH et réciproquement.

La famille de solutions à adopter dépend de la nature du problème. En général, lorsque celui-ci décrit l'évolution d'un phénomène physique dans un espace non limité (chaîne infinie d'oscillateurs, corde infinie, propagation libre du son ou d'une onde électromagnétique), la solution en termes d'ondes progressives est préférable. Quand des limitations spatiales à la propagation de l'onde existent (corde attachée à au moins l'une de ses extrémités, chaîne finie d'oscillateurs, propagation du son avec réflexions, guides d'ondes en électromagnétisme), la solution en termes d'ondes stationnaires est mieux adaptée[17].

17. Le qualificatif « adaptée » signifie que les conditions initiales et aux limites s'intègrent plus naturellement dans une écriture que dans l'autre.

C. Applications aux cordes

C.1. Corde vibrante fixée à ses extrémités

C.1.1. Conditions aux limites et conditions initiales

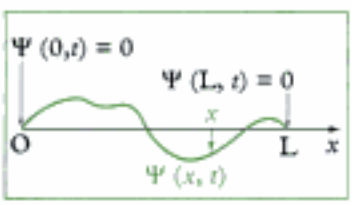


Fig. 6 - Corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

• On s'intéresse aux oscillations transversales d'une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités (fig.6). Ainsi, à tout instant t, la solution $\psi(x, t)$ vérifie, en $x = 0$ et $x = L$, les deux **conditions aux limites** suivantes :

$$\psi(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(L,t) = 0 \ .$$

• Par ailleurs, il faut connaître les **conditions initiales** sur l'état de la corde à l'instant $t = 0$ pour résoudre le problème :

– position initiale de chaque point de la corde : $\psi(x,0) = u(x)$;

– vitesse initiale de chaque point de la corde : $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) = v(x)$.

> La donnée des **conditions aux limites** et des **conditions initiales** du problème assure **l'unicité de la solution** de l'équation de d'Alembert.

C.1.2. Modes propres

En l'absence de frottements et d'actions extérieures, la corde effectue des oscillations libres caractérisées par l'équation de d'Alembert. Les conditions aux limites expriment que les points $x = 0$ et $x = L$ sont des nœuds d'oscillation de la corde[18]. Les ondes stationnaires sont donc mieux adaptées pour exprimer la solution de l'équation de d'Alembert. On cherche donc celle-ci sous la forme :

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0), \ \text{avec} \ \ kc = \omega \ .$$

18. Ces deux points restent en effet toujours immobiles.

Copyrighted material

Les conditions aux limites imposent, à tout instant t :

$$\begin{cases} \psi(0,t)=0 & \Rightarrow \quad \cos(\phi_0)=0 & \Rightarrow \quad \phi_0=\dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ \psi(L,t)=0 & \Rightarrow \quad \cos(kL+\phi_0)=0 & \Rightarrow \quad kL=n\pi \quad (n \text{ entier}) \end{cases}.$$

Le module k du vecteur d'onde ne peut donc prendre que des valeurs discrètes :

$$\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L}}, \text{ avec } n \text{ entier.}$$

On dit que k est quantifié. La quantification de k entraîne celle de ω :

$$\boxed{\omega_n = k_n c = n\frac{\pi c}{L}}$$

et celle de la longueur d'onde λ : $\lambda_n = \dfrac{2\pi}{k_n} = \dfrac{2L}{n}$, mise sous la forme[19] :

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}}.$$

19. D'après cette relation, pour n fixé, le nombre de nœuds de vibration est donc égal à $n + 1$.

Définition 2

Pour une corde vibrante fixée à ses extrémités, l'équation de d'Alembert complétée par les conditions aux limites $\psi(0, t) = 0$ et $\psi(L, t) = 0$ admet une infinité de solutions appelées **modes propres de la corde** (fig. 7) :

$$\psi_n(x,t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

De même, les pulsations ω_n sont appelées les pulsations propres de la corde.

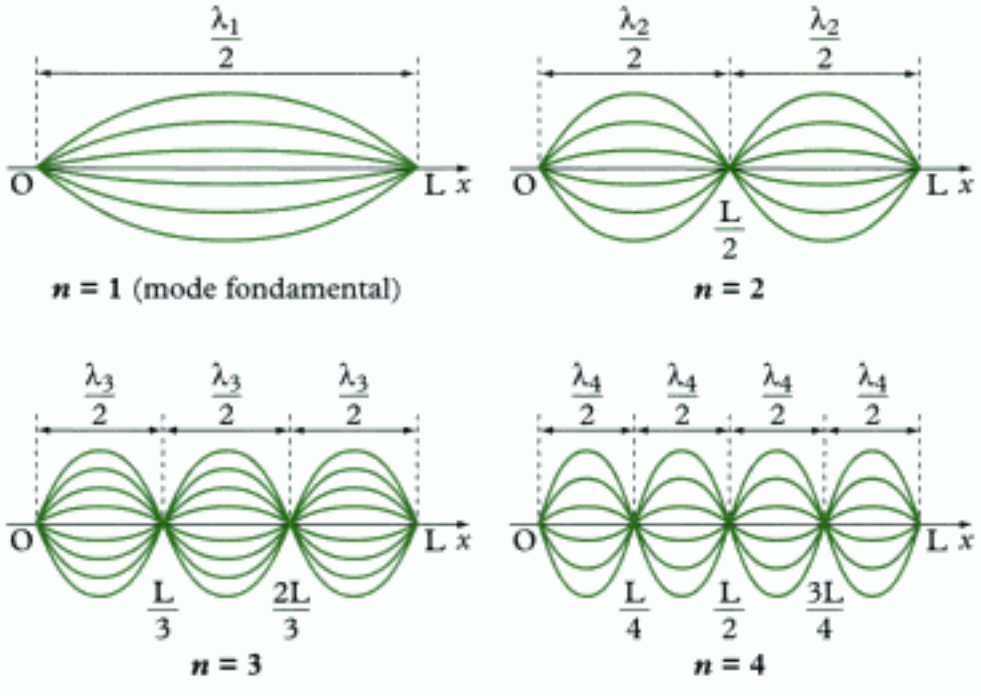


Fig. 7 - Modes propres (n = 1, 2, 3, 4) à différents instants.

Copyrighted material

C.1.3. Solution complète

Les modes propres constituent une famille de solutions de l'équation de d'Alembert. En vertu du principe de superposition, toute combinaison linéaire des modes propres est encore une solution de l'équation. En régime permanent, l'analyse de Fourier montre qu'il s'agit alors de la solution la plus générale. Ainsi, toute solution peut s'écrire[20] :

$$\boxed{\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n(x,t)}.$$

La solution complète, superposition d'une infinité de modes propres, contient également une infinité d'inconnues A_n et φ_n. Ce sont les conditions initiales qui permettent de déterminer de manière unique ces inconnues. Ainsi, on a[21] :

$$\begin{cases}\psi(x,0)=u(x) & \Rightarrow \quad u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(\varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=v(x) & \Rightarrow \quad v(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi c}{L}A_n\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).\end{cases}$$

Ces deux expressions sont en fait les décompositions en séries de Fourier des fonctions u et v. En notant u_n et v_n les coefficients de Fourier de u et v donnés par :

$$u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{et} \quad v(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

on déduit les coefficients A_n et φ_n grâce aux relations :

$$A_n\cos(\varphi_n)=u_n \quad \text{et} \quad -\frac{n\pi c}{L}A_n\sin(\varphi_n)=v_n.$$

Dans le cas étudié, les oscillations de la corde ne sont pas entretenues : on dit que la corde **oscille librement**. Dans la réalité, les oscillations libres sont difficiles à observer en raison des frottements qui font décroître l'amplitude jusqu'à ce que la corde soit à nouveau au repos.

Remarque

L'analyse de Fourier montre que toute fonction périodique admet une décomposition en série de Fourier. Ainsi, pour une fonction f de période 2L, on peut écrire :

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right],$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par ($n\in\mathbb{N}^*$) :

$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad \text{et} \quad b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Le coefficient a_0 s'interprète comme la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0, 2L]. Si f est une fonction paire, tous les coefficients b_n sont nuls. Si f est une fonction impaire, tous les coefficients a_n sont nuls.

20. La somme porte uniquement sur les modes propres d'indices $n \geq 1$ bien que mathématiquement, les modes d'indices négatifs soient également des solutions de l'équation de d'Alembert. Ces solutions ne constituent cependant pas de nouvelles solutions car $\psi_{-n}=-\psi_n$. Les solutions d'indices positifs et d'indices négatifs ne sont donc pas linéairement indépendantes. Seules les solutions linéairement indépendantes sont à prendre en considération.

21. Certaines précautions mathématiques doivent être prises lors de la dérivation d'une somme infinie de termes. Nous admettrons que dans les problèmes physiques rencontrés, toutes les conditions sont remplies pour que cette opération soit légitime.

Copyrighted material

Dans la situation qui nous intéresse, les fonctions u et v, définies sur l'intervalle [0, L], peuvent être prolongées sur l'intervalle [–L, L] en des fonctions périodiques impaires, de sorte que leur décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{et} \quad v(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

avec :

$$u_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{L}\int_0^L v(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x .$$

C.2. Corde de Melde

C.2.1. Conditions aux limites et conditions initiales

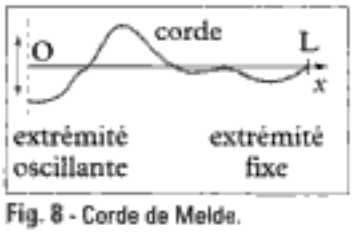


Fig. 8 - Corde de Melde.

L'expérience de la corde de Melde consiste à étudier les oscillations d'une corde dont l'une des extrémités ($x = 0$) est soumise à un déplacement transversal harmonique de la forme $a\sin(\omega t)$, l'autre extrémité ($x = L$) étant fixe (fig.8). Les **conditions aux limites** sont par conséquent, à chaque instant t :

$$\psi(0,t) = a\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad \psi(L,t) = 0 .$$

Comme pour la corde vibrante fixée à ses extrémités, on note les **conditions initiales** :

$$\psi(x,0) = u(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0) = v(x),$$

où les fonctions u et v définissent respectivement la position et la vitesse initiales de chaque point de la corde.

C.2.1. Solution complète

Contrairement au cas précédent où les oscillations étaient libres, la corde est à présent forcée d'osciller à l'une de ses extrémités : on dit qu'elle est en **régime forcé**. Cette situation ne diffère cependant de la précédente que par la condition à la limite en x =0. La solution générale de l'équation d'ondes se décompose en deux termes :

$$\psi(x,t) = \psi_l(x,t) + \psi_f(x,t),$$

où le terme ψ_l est associé au régime libre de la corde et le terme ψ_f au régime forcé.

Si l'on tient compte de la présence de frottements, la contribution de ψ_l va décroître de manière exponentielle au cours du temps. Après une durée de l'ordre de quelques fois le temps caractéristique τ associé à la corde (qui dépend des propriétés mécaniques de celle-ci), on aura $\psi_l \approx 0$ et la solution générale pourra être assimilée à la solution de régime forcé $\psi \approx \psi_f$. Dans la suite, on considérera uniquement le **régime permanent**.

Les extrémités de la corde étant contraintes, une solution en ondes stationnaires est mieux adaptée qu'une solution en ondes progressives. Ainsi, on cherche une solution sous la forme :

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0), \text{ avec } kc = \omega .$$

Les conditions aux limites, valables à tout instant t, imposent :

$$\begin{cases} \psi(0,t) = a\sin(\omega t) & \Rightarrow \quad A\cos(\omega t + \varphi_0)\cos(\phi_0) = a\sin(\omega t) \\ \psi(L,t) = 0 & \Rightarrow \quad A\cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kL + \phi_0) = 0 \end{cases}$$

Copyrighted material

22. Le choix suivant est également possible :

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad A\cos\phi_0 = -a$$

$$\text{et} \quad kL + \phi_0 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Il donne les mêmes expressions finales.

d'où l'on déduit[22] :

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}; \quad A\cos\phi_0 = a \quad \text{et} \quad kL + \phi_0 = \frac{\pi}{2} \cdot$$

L'onde stationnaire solution s'écrit finalement sous la forme (fig. 9) :

$$\psi(x,t) = \frac{a}{\sin(kL)} \sin\left[k(L-x)\right] \sin(\omega t) .$$

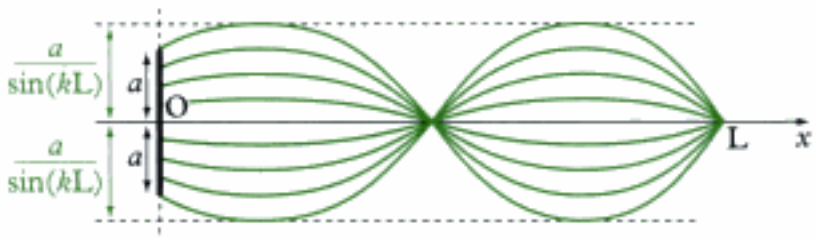


Fig. 9 - Corde de Melde. Onde stationnaire pour ω quelconque.

C.2.3. Résonances

D'après l'expression précédente, l'amplitude des oscillations de la corde devient infinie si $kL = n\pi$, c'est-à-dire si la pulsation ω de l'excitation coïncide avec la pulsation propre $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ de la corde : on dit que la corde entre **en résonance**.

Dans la réalité, l'amplitude des oscillations n'est pas infinie, car l'apparition de non linéarités et la raideur de la corde, non prise en compte dans notre modèle, limitent le phénomène.

Comme $\left|\frac{a}{\sin(kL)}\right| \gg a$, on peut remarquer qu'à la résonance, la position $x = 0$ où est placé l'excitateur se comporte pratiquement comme un nœud d'oscillations. La corde présente alors, en fonction de la pulsation propre, les allures suivantes à différents instants (fig.10) :

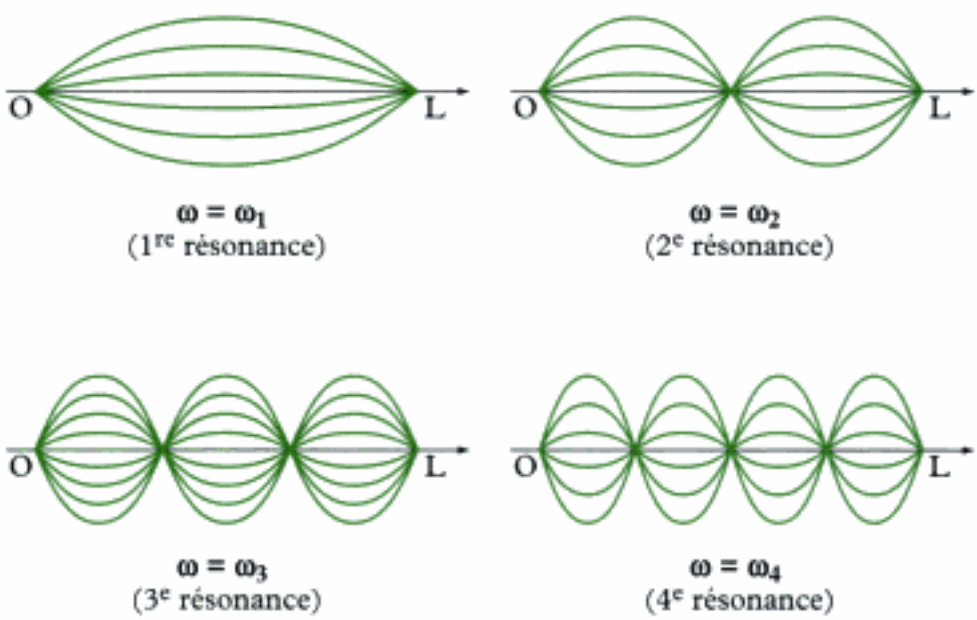


Fig. 10 - Corde de Melde. Résonances ($n = 1, 2, 3, 4$) à différents instants.

Ajoutons pour conclure que lorsque l'amplitude des oscillations devient trop importante, c'est le modèle lui-même qui doit être remis en cause. L'équation de d'Alembert ne décrit les déplacement transversaux de la corde que si ces derniers sont de faible amplitude !

Copyrighted material

L'essentiel

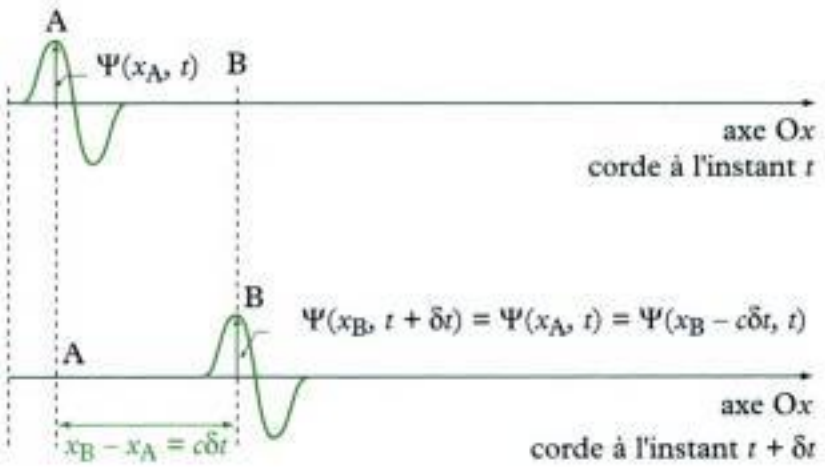
✓ Équation de d'Alembert

- L'évolution de la perturbation dans une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs linéaires, ou l'évolution des petits mouvements transversaux d'une corde sans raideur, sont caractérisées par l'**équation de d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 .$$

Cette équation décrit le phénomène de propagation d'une onde dans un milieu continu. c est la vitesse de propagation de l'onde et s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

- **Principe de superposition** : la linéarité de l'équation de d'Alembert entraîne que toute combinaison linéaire de solutions de l'équation est encore une solution.
- **Principe d'unicité** : la donnée des conditions aux limites et des conditions initiales du problème assure l'unicité de la solution de l'équation de d'Alembert.
- La fonction $\psi(x,t) = f(x - ct)$, solution de l'équation de d'Alembert, décrit une **onde progressive se propageant dans le sens de x** croissant à la vitesse c.



De même, la fonction $\psi(x,t) = g(x + ct)$, solution de l'équation de d'Alembert, décrit une **onde progressive se propageant dans le sens de x décroissant** à la vitesse c (ou onde régressive).

- La **solution générale** de l'équation de d'Alembert est la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens opposé à la même vitesse c :

$$\psi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) .$$

- Dans l'espace à trois dimensions, une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :

$$\psi(M,t) = f(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - ct) + g(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + ct)$$

décrit une **onde plane se propageant dans la direction du vecteur directeur unitaire** $\vec{u}$. L'onde $f(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - ct)$ se propage dans le sens de $\vec{u}$, l'onde $g(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + ct)$ dans le sens opposé à $\vec{u}$.

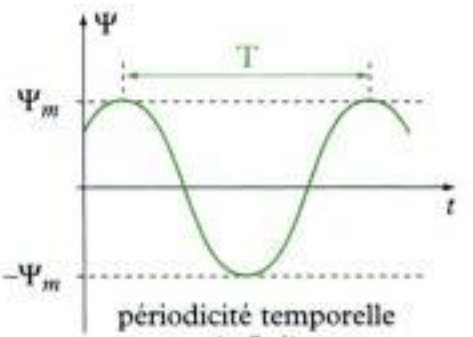
Copyrighted material

✓ Ondes progressives planes harmoniques

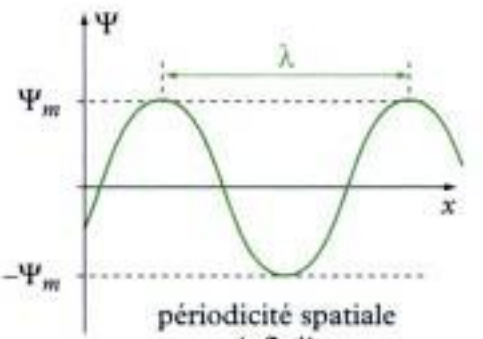
• Une onde progressive plane harmonique (ou OPPH) se propageant dans le sens de x croissant a la forme :

$$\psi(x,t) = \psi_m \cos\left(\omega t - kx + \phi\right)$$

ψ_m amplitude (dimension de ψ)
ω pulsation (rad · s^{-1})
k module du vecteur d'onde (rad · m^{-1})
ϕ phase à l'origine (rad)



périodicité temporelle
(x fixé)



périodicité spatiale
(t fixé)

Une OPPH présentent une double périodicité, spatiale et temporelle. La **longueur d'onde λ** (en m) et la **période T** (en s) vérifient les relations :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

• En représentation complexe, on écrit :

$$\underline{\psi}(x,t) = \psi_m e^{j(\omega t - kx + \phi)}.$$

L'onde réelle correspond alors à la partie réelle de sa représentation complexe :

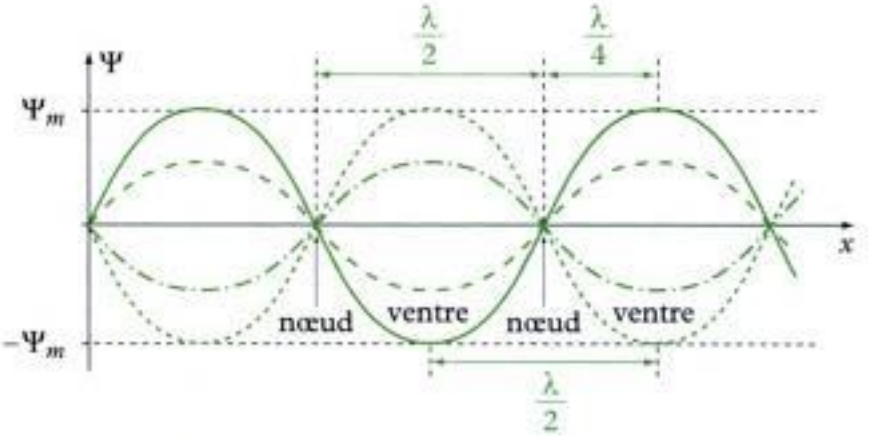
$$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\psi}(x,t)\right].$$

• D'après l'analyse de Fourier, toute solution générale de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme la combinaison linéaire d'une infinité d'OPPH (famille de **solutions génératrices**).

✓ Ondes stationnaires

• Une **onde stationnaire plane harmonique** est une solution de l'équation de d'Alembert obtenue par la méthode de séparation des variables et caractérisée par une absence de propagation :

$$\psi(x,t) = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_0)\cos(kx + \phi_0).$$



Copyrighted material

• Toute onde stationnaire plane harmonique peut s'écrire comme **la somme de deux OPPH et réciproquement**. En conséquence, toute solution générale de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme la combinaison linéaire d'une infinité d'ondes stationnaires (famille de **solutions génératrices**).

✓ **Applications aux cordes**

Pour une corde vibrante fixée à ses extrémités, l'équation de d'Alembert complétée par les conditions aux limites $\psi(0,t)=0$ et $\psi(L,t)=0$ admet une infinité de solutions appelées **modes propres** :

$$\psi_n(x,t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment établir l'équation d'onde caractérisant la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel ?

→ Savoir faire

1. Identifier la grandeur physique Ψ qui caractérise la propagation de l'onde.
2. Si le milieu est continu et unidimensionnel, raisonner sur une tranche élémentaire d'épaisseur dx.
3. Appliquer l'un des théorèmes fondamentaux de la dynamique (théorème de la résultante dynamique ou théorème du moment dynamique).
4. Dans les calculs, ne conserver que les termes d'ordre 1 en dx, et si l'énoncé l'y autorise, en Ψ.

→ Application

On considère un solide homogène cylindrique, d'axe Ox, de section S constante. Une onde élastique se propage longitudinalement dans le solide. Elle engendre un déplacement $\Psi(x, t)$ d'une section située à l'abscisse x à l'équilibre. Pour des déplacements de faible amplitude, la force exercée par la partie du solide située à droite de l'abscisse x sur la partie située à gauche est donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F}(x, t) = ES\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, t)\,\vec{u}_x,$$

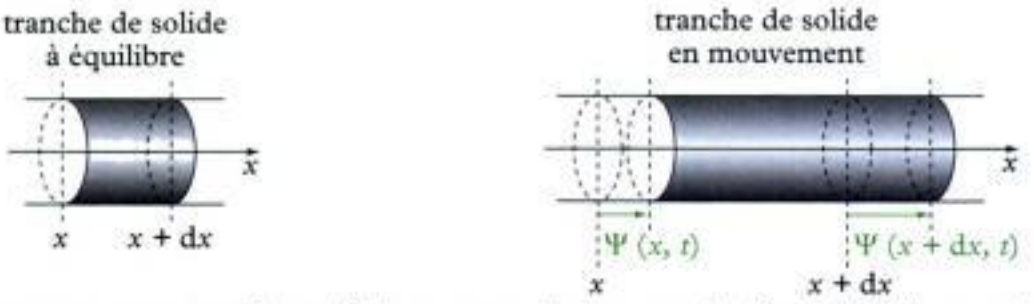
où E est une constante positive qui ne dépend que du matériau, appelée module d'Young.

Établir l'équation d'onde vérifiée par Ψ.

Solution

1. La grandeur qui caractérise la propagation de l'onde est le déplacement Ψ d'une section du cylindre.
2. On considère une tranche d'épaisseur dx à l'équilibre, située entre les abscisses x et $x + dx$.

Copyrighted material



• Mise en mouvement, cette tranche se déplace et son épaisseur varie. Cette dernière vaut à présent :

$$dx + \Psi(x + dx, t) - \Psi(x, t), \text{ soit à l'ordre 1 en } dx : dx\left[1+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right].$$

En désignant par S la section du cylindre, la masse élémentaire de cette tranche est donc :

$$dm = \rho S dx\left[1+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right].$$

• La position du centre de masse G de cette tranche est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_0} + \overrightarrow{G_0G}$$

G_0 étant la position du centre de masse à l'équilibre.

On a :

$$\overrightarrow{G_0G} = \left[\frac{x+\Psi(x,t)+x+dx+\Psi(x+dx,t)}{2} - \frac{x+x+dx}{2}\right]\vec{u}_x$$

où l'on fait apparaître une différence de deux termes, chacun exprimant l'abscisse du milieu de la tranche. Ainsi :

$$\overrightarrow{G_0G} = \frac{1}{2}\left[\Psi(x,t)+\Psi(x+dx,t)\right]\vec{u}_x.$$

À l'ordre 1 en dx, il reste :

$$\overrightarrow{G_0G} = \left[\Psi(x,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)dx\right]\vec{u}_x.$$

Le milieu est la position du centre de masse pour un matériau homogène.

❺ Le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$dm\ \vec{a}\,(G) = d\vec{F}_{ext}$$

où $d\vec{F}_{ext}$ est la somme des forces extérieures qui s'exercent sur la tranche de masse dm, de centre de masse G, d'accélération $\vec{a}\,(G)$. On a :

$$\vec{a}\,(G) = \frac{\partial^2\overrightarrow{OG}}{\partial t^2}, \text{ soit : } \vec{a}\,(G) = \frac{\partial^2\overrightarrow{G_0G}}{\partial t^2}$$

ou encore : $\vec{a}\,(G) = \left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^2\partial x}dx\right]\vec{u}_x.$

On a également :

$$d\vec{F}_{ext} = \vec{F}\,(x + dx, t) - \vec{F}\,(x, t) = ES\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x+dx,t)-\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)\right]\vec{u}_x.$$

Copyrighted material

À l'ordre 1 en dx, on obtient :

$$d\vec{F}_{ext} = ES\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t)dx\,\vec{u}_x .$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\rho S dx\left[1+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Psi}{\partial t^2\partial x}dx\right] = ES\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx.$$

À l'ordre 1 en dx, mais également en Ψ (puisque les déplacements sont petits), il reste :

$$\rho S\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

qui se met sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0}$$

avec la vitesse de propagation c donnée par :

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.}$$

Méthode n°2

Comment déterminer la solution d'une équation d'onde ?

→ Savoir faire

❶ Écrire la forme générale des solutions. Pour limiter les calculs :

– si l'onde étudiée se propage dans un milieu limité spatialement, l'écriture en termes d'ondes stationnaires est préférable ;

– si l'onde étudiée se propage dans un milieu illimité spatialement, l'écriture en termes d'ondes progressives est préférable puisqu'il n'y a, en général, pas d'ondes régressives.

❷ En injectant cette solution dans l'équation d'onde, obtenir une relation entre la pulsation ω et le vecteur d'onde k. Réécrire la solution en conséquence.

❸ Exploiter les conditions aux limites pour déterminer les pulsations propres éventuelles et réduire le nombre d'inconnues.

❹ En déduire l'expression générale de la solution.

→ Application

On considère une onde qui se propage dans un milieu limité, de longueur L, suivant l'axe Ox. Le phénomène ondulatoire est caractérisé par la grandeur dynamique $\Psi(x, t)$ qui vérifie l'équation d'onde :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0}$$

On suppose en outre que des conditions aux limites sont imposées :

$$\Psi(x = 0, t) = 0 \text{ et } \Psi(x = L, t) = 0.$$

1) Chercher la solution générale sous la forme d'une onde progressive.

2) Même question sous la forme d'une onde stationnaire.

3) Conclure.

Copyright

Solution

1) ❶ On recherche des solutions sous la forme :

$$\Psi(x,t) = \mathbf{A}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \delta),$$

avec $\vec{r} = r\,\vec{u}_x$, $\vec{k} = k\,\vec{u}_x$, et $\omega > 0$.

❷ On calcule :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi \text{ et } \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k^2\Psi.$$

L'équation d'onde donne alors : $(-\omega^2 + k^2c^2)\Psi = 0$.

En recherchant une solution Ψ non identiquement nulle, on doit avoir :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \text{ soit : } k_+ = \frac{\omega}{c} \text{ ou } k_- = -\frac{\omega}{c}.$$

Il existe donc deux solutions à l'équation. Cette dernière étant linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$\Psi(x,t) = \Psi_+(x,t) + \Psi_-(x,t)$$

avec : $\Psi_+(x,t) = A_+\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \delta_+)$

$\Psi_-(x,t) = A_-\cos(\omega t + \frac{\omega}{c}x + \delta_-)$

❸ Les conditions aux limites imposent qu'à tout instant t, on ait :

$$\begin{cases} \Psi_+(0,t) + \Psi_-(0,t) = 0 \\ \Psi_+(L,t) + \Psi_-(L,t) = 0 \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} A_+\cos(\omega t + \delta_+) + A_-\cos(\omega t + \delta_-) = 0 \\ A_+\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}L + \delta_+) + A_-\cos(\omega t + \frac{\omega}{c}L + \delta_-) = 0 \end{cases}$$

Posons $\varepsilon_+ = \omega t + \delta_+$ et $\varepsilon_- = \omega t + \delta_-$. Alors :

$$\begin{cases} A_+\cos\varepsilon_+ + A_-\cos\varepsilon_- = 0 \\ A_+\cos(\varepsilon_+ - \frac{\omega L}{c}) + A_-\cos(\varepsilon_- + \frac{\omega L}{c}) = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation combinée à la première peut se simplifier pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} A_+\cos\varepsilon_+ + A_-\cos\varepsilon_- = 0 \\ (A_+\sin\varepsilon_+ - A_-\sin\varepsilon_-)\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution autre que la solution nulle ($A_+ = A_- = 0$), on doit imposer :

$$\begin{vmatrix} \cos\varepsilon_+ & \cos\varepsilon_- \\ \sin\varepsilon_+\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) & -\sin\varepsilon_-\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \end{vmatrix} = 0$$

soit, après calculs : $\sin(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$

c'est-à-dire : $\sin(2\omega t + \delta_+ + \delta_-)\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$.

Cette relation devant être vérifiée à tout instant, elle entraine :

$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0, \text{ soit : } \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (n \text{ entier}).$$

Il reste une condition à expliciter : $A_+\cos\varepsilon_+ + A_-\cos\varepsilon_- = 0$

soit : $A_+\cos(\omega t + \delta_+) + A_-\cos(\omega t + \delta_-) = 0$

Copyrighted material

qui donne, à tout instant : $(A_+ \cos\delta_+ + A_- \cos\delta_-)\cos(\omega t) - (A_+ \sin\delta_+ + A_- \sin\delta_-)\sin(\omega t) = 0$.

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} A_+ \cos\delta_+ + A_- \cos\delta_- = 0 \\ A_+ \sin\delta_+ + A_- \sin\delta_- = 0. \end{cases}$$

Là encore, pour éviter la solution nulle, on doit imposer :

$$\begin{vmatrix} \cos\delta_+ & \cos\delta_- \\ \sin\delta_+ & \sin\delta_- \end{vmatrix} = 0$$

condition qui s'écrit : $\sin(\delta_+ - \delta_-) = 0$.

D'où $\delta_+ = \delta_-$ à π près. En posant $\delta = \delta_+ = \delta_-$, il vient alors :

$$\mathbf{A_- = -A_+}.$$

⚠ On peut prendre $\delta_+ = \delta_-$ sans que cela change le résultat final ; ce qui est heureux d'un point de vue physique. Prendre $\delta_+ = \delta_- + \pi$ revient à changer le signe relatif de A_+ et A_-, sans modifier globalement l'expression de Ψ.

❹ D'où la solution Ψ_n associée à une valeur de n, que l'on nomme mode propre :

$$\Psi_n(x,t) = \mathbf{A_n}\left[\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \delta_n\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct) + \delta_n\right]\right].$$

La solution générale de l'équation d'onde est alors :

$$\boxed{\Psi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(x,t)}.$$

⚠ La somme porte uniquement sur les valeurs $n \geq 1$ puisque $\Psi_{-n} = \Psi_n$ et $\Psi_0 = 0$. Seules les solutions linéairement indépendantes doivent être prises en considération.

2) ❶ On recherche à présent la solution sous la forme :

$$\Psi(x,t) = B\cos(\omega t + \varphi)\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} + \phi).$$

❷ On a encore :

$$\frac{\partial_2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi \text{ et } \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k^2\Psi, \text{ qui impose : } k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2.$$

D'où : $\Psi(x,t) = \cos(\omega t + \varphi)\,[B_+ \cos(\frac{\omega}{c}x + \phi) + B_- \cos(\frac{\omega}{c}x - \phi)]$.

❸ Les conditions aux limites imposent à présent :

$$\begin{cases} (B_+ + B_-)\cos\phi = 0 \\ B_+ \cos(\frac{\omega L}{c} + \phi) + B_- \cos(\frac{\omega L}{c} - \phi) = 0 \end{cases}$$

En développant la deuxième relation, on a :

$$(B_+ + B_-)\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)\cos\phi - (B_+ - B_-)\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)\sin\phi = 0\,.$$

Le système précédent est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} (B_+ + B_-)\cos\phi = 0 \\ (B_+ - B_-)\sin\phi\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

Copyrighted material

Plusieurs possibilités sont alors envisageables.

– Si $\sin\phi = 0$, alors $B_- = -B_+$. On obtient dans ce cas $\Psi(x, t) = 0$, à tout instant.

Cherchant une solution non nulle, on rejette cette possibilité.

– Si $B_- = B_+$, alors $\cos\phi = 0$. On obtient de nouveau $\Psi(x, t) = 0$, possibilité exclue.

– Si $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$, avec $\sin\phi \neq 0$, alors $\cos\phi \neq 0$ et $B_- = -B_+$. On obtient une solution non nulle qui s'écrit :

$$\Psi(x, t) = B_+ \cos(\omega t + \varphi)\left[\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) - \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \phi\right)\right].$$

La condition $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$ impose la quantification de ω :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \text{ avec } n \text{ entier.}$$

Finalement, on trouve :

$$\Psi_n(x, t) = 2B_n \sin\phi_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

puis :

$$\boxed{\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x, t)}\ .$$

3) Il est intéressant de revenir sur l'écriture d'un mode propre Ψ_n de vibration :

– dans la question 1, on a :

$$\Psi_n^{(1)}(x, t) = A_n\left[\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x - ct) - \delta_n\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{L}(x + ct) + \delta_n\right]\right]$$

– dans la question 2, on a :

$$\Psi_n^{(2)}(x, t) = 2B_n \sin\phi_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En développant $\Psi_n^{(1)}$, on obtient :

$$\Psi_n^{(1)}(x, t) = 2A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct + \delta_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ que l'on peut écrire :}$$

$$\Psi_n^{(1)}(x, t) = 2A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct + \delta_n - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On constate que $\Psi_n^{(1)}$ et $\Psi_n^{(2)}$ sont identiques pourvu que :

$$A_n = B_n \sin\phi_n \quad \text{et} \quad \varphi_n = \delta_n - \frac{\pi}{2}.$$

Ces fonctions représentent la même solution physique. Leur écriture initiale nous permet d'en donner des interprétations différentes.

$\Psi_n^{(1)}$ est la somme d'une onde progressive Ψ_+ dans le sens des x croissants et d'une onde progressive Ψ_- dans le sens des x décroissants (onde régressive).

Physiquement, tout se passe comme si une onde progressive qui prend naissance en $x = 0$ se réfléchit en $x = L$. Il résulte, en tout point du milieu, une onde résultante somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

Cette superposition donne naissance à une onde stationnaire, ce qu'exprime $\Psi_n^{(2)}$.

Cet exemple que nous avons traité de façon complète montre l'équivalence entre les deux approches : ondes progressives ou ondes stationnaires.

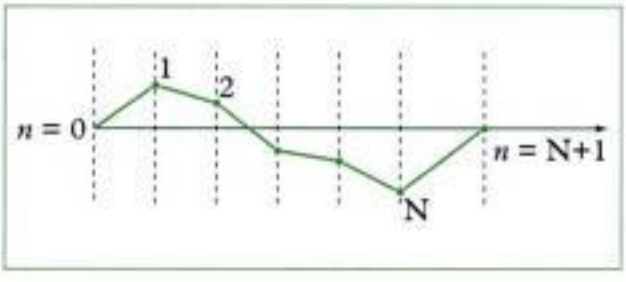
Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Oscillations d'une chaîne de masses

Une chaîne de masses comporte N masses identiques régulièrement réparties sur un fil sans raideur de masse négligeable, fixé à ses extrémités.



La masse totale et la longueur totale de la chaîne sont fixées. La distance qui sépare chaque masse est a, leur masse est m. La tension du fil est supposée constante et notée T_0. À l'équilibre, le fil est horizontal, confondu avec un axe Ox. Les masses peuvent osciller transversalement, sans frottements. On suppose ces déplacements très faibles devant a et on néglige l'influence de la pesanteur.

1) On note $\Psi_n(t)$ le déplacement vertical de la masse n à l'instant t. Établir l'équation différentielle vérifiée par Ψ_n.

On posera $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{T_0}{ma}}$.

2) On étudie une première situation pour laquelle N = 2.

a) On adopte une représentation complexe et on recherche Ψ_n sous la forme $\underline{\Psi}_n(t) = \underline{A}_n e^{j\omega t}$ avec $n = 1$ ou 2. Montrer qu'un tel choix n'est possible que si la pulsation ω prend deux valeurs particulières ω_1 et ω_2.

b) En déduire les relations entre les amplitudes complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ selon que $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$.

c) Les deux solutions obtenues pour $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$ constituent les modes propres du système. ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres du système. Représenter simplement l'allure de la chaîne lorsqu'elle oscille dans chacun de ces modes propres.

d) Quelle est l'expression générale de la solution $\Psi_n(x,t)$?

3) L'extrémité gauche du fil est soumise à une excitation périodique de la forme $\Psi_0(t) = A_0 \cos(\omega t)$. L'extrémité droite du fil reste immobile : $\Psi_3(t) = 0$.

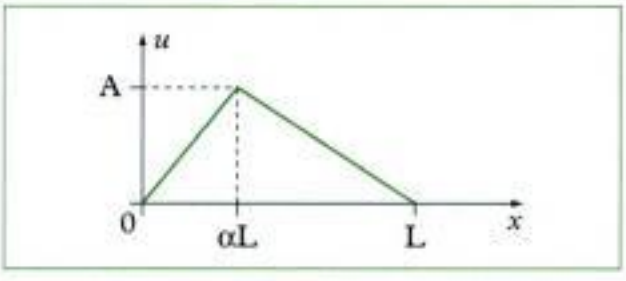
a) Déterminer le mouvement des deux masses.

b) Expliquer le comportement du système lorsque ω tend vers l'une des pulsations propres.

4) Comment se généralisent les résultats précédents lorsque N tend vers l'infini ? Commenter.

Ex. 2 Corde pincée

Une corde sans raideur de longueur L, de masse linéique μ et de tension T, est fixée à ses extrémités. On désigne par $\Psi(x,t)$ le déplacement transversal d'un élément de corde situé à l'abscisse x à l'instant t. À l'instant initial, cette corde est pincée et adopte la forme donnée par la courbe suivante :



On note $u(x)$ l'équation de cette courbe. La corde est lâchée sans vitesse initiale. Déterminer l'expression générale de $\Psi(x,t)$.

Niveau 2

Ex. 3 Oscillations d'un ressort

On considère un ressort horizontal à spires non jointives de longueur à vide L, de raideur k et de masse linéique μ.

1) On découpe par la pensée ce ressort en N tranches identiques de longueur ε de sorte que $L = N\varepsilon$.

Montrer que chaque tranche se comporte comme un ressort de raideur $k_\varepsilon = \dfrac{kL}{\varepsilon}$.

2) Le ressort est à présent fixé en O à son extrémité gauche et il est mobile à son extrémité droite. On repère la position au repos d'une spire par son abscisse x sur l'axe horizontal. Lorsque le ressort se déforme, la position de la spire à l'instant t devient $x + \Psi(x,t)$. On admet que les déformations du ressort restent suffisamment faibles pour ne pas endommager ce dernier (domaine de déformation élastique). En décomposant le ressort comme dans la question précédente, montrer qu'une tranche d'épaisseur ε, située en x au repos, est soumise, de la part de ses proches voisines, à une force $\vec{F}(x,t)$ de la forme :

$$\vec{F}(x,t) = \varepsilon k L \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)(x,t)$$

3) En déduire que Ψ vérifie l'équation de d'Alembert. Donner l'expression de la vitesse de propagation.

Copyrighted material

4) Une masse m est à présent accrochée à l'extrémité libre du ressort et peut glisser sans frottement sur un support horizontal.

a) On cherche une solution sous la forme :

$$\Psi(x,t) = X(x)\cos(\omega t).$$

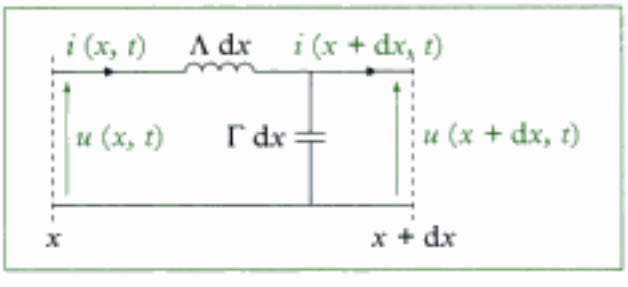
Exprimer les conditions aux limites du problème et en déduire que ω ne peut prendre que des valeurs discrètes.

b) Par une analyse graphique, déterminer les valeurs approchées des pulsations propres identifiées.

c) Pour m fixée, quel est le comportement du système si $\mu \to 0$?

Ex. 4 Ligne électrique sans perte

Une ligne électrique est un ensemble de deux conducteurs séparés par un isolant, portés à des potentiels différents et parcourus par des courants de sens opposés. Sa longueur est en général telle que l'ARQP n'est plus valable sur la ligne dans sa globalité. La propagation des ondes électromagnétiques dans la ligne doit être prise en compte. Toutefois, l'ARQP peut encore être appliquée sur des éléments de ligne de longueur dx petits devant les longueurs d'onde électromagnétiques. La modélisation d'une ligne fait intervenir plusieurs caractéristiques. En raison de l'existence de courants de sens opposés, des champs magnétiques se propagent dans la ligne. Des effets inductifs sont donc à prendre en compte. L'existence de différences de potentiel est à l'origine de champs électriques. Des effets capacitifs doivent également être pris en compte. Enfin, les fils conducteurs et l'isolant non parfait sont à l'origine de pertes traduites en termes de résistance. Ramenée à l'unité de longueur dx, la ligne électrique est ainsi modélisée de la façon suivante.



Dans cet exercice, on envisage uniquement le cas d'une ligne sans pertes. Seuls ses effets inductifs et capacitifs sont considérés.

1) Établir les relations entre $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial i}{\partial t}$.

2) Montrer que la tension u et le courant i sont solutions d'une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la vitesse de propagation de l'onde.

3) On définit l'impédance de la ligne en x par $Z(x) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)}$ et son impédance caractéristique par $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

a) Quelle est l'expression Z_p de cette impédance pour une onde progressive de la forme $u_p(x,t) = f(x-ct)$ se propageant dans la ligne ?

b) Quelle est celle Z_r pour une onde régressive de la forme $u_r(x,t) = g(x+ct)$?

4) La ligne est à présent fermée à l'une de ses extrémités $(x = a)$ par une impédance Z'.

a) Montrer qu'en régime permanent, une onde réfléchie apparaît dans la ligne. Donner l'expression de la tension réfléchie u_r et du courant réfléchi i_r.

b) Quelle est alors l'expression de la tension totale u et du courant total i ?

c) En déduire l'impédance de la ligne $Z(x)$.

d) Dans le cas particulier d'une tension incidente sinusoïdale $u_p(x,t) = u_m e^{j(\omega t - kx)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$, déterminer l'expression de l'impédance de la ligne et étudier les cas particuliers suivants : ligne ouverte (Z' infinie), court-circuit (Z' nulle).

Ex. 5 Ondes de gravité

Une onde de gravité désigne les mouvements d'oscillations d'un liquide, dans le champ de pesanteur, contenu dans un bassin. Ces ondes se manifestent par des déformations de la surface libre qui se propagent. Dans cet exercice, on se propose d'établir la propagation de ces ondes dans un bassin à fond plan horizontal xOy de faible profondeur. Le fond du bassin est à la cote $z = 0$ et la surface libre, au repos, à la cote $z = H$. Le fluide, dont on néglige les effets de la viscosité, est supposé incompressible et en écoulement irrotationnel. Il est plongé dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et la pression sur sa surface libre est égale à celle p_0 de l'atmosphère. On note $\vec{v}(x,y,z,t)$ la vitesse en un point (x,y,z) du fluide à l'instant t. La pression en ce point est notée $p(x,y,z,t)$ et la cote de la surface libre $h(x,y,t) = H + \xi(x,y,t)$.

On suppose que l'écoulement est invariant par translation suivant Oy. Ainsi, on peut écrire :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,z,t)\vec{u}_x + v_z(x,z,t)\vec{u}_z.$$

1) Montrer qu'en raison du caractère irrotationnel de l'écoulement, $\vec{v}$ ne dépend pas de z.

2) En effectuant un bilan de matière sur une colonne verticale de fluide, de section droite $dxdy$ infinitésimale, montrer que l'on a :

$$\operatorname{div}\left[(H+\xi)\vec{v}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

3) Écrire l'équation d'Euler et en déduire l'expression de la pression dans le fluide.

4) Les ondes de gravité que l'on considère sont supposées de faible amplitude. Les perturbations $\vec{v}$ et ξ engendrées par leur passage sont faibles. En se limitant au premier ordre en $\vec{v}$ et ξ, linéariser les équations précédentes.

5) En déduire que $\vec{v}$ et ξ vérifient une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la vitesse de propagation des ondes de gravité.

Copyrighted material

Ex. 6 Oscillatons libres de la Terre

Lorsque la Terre est excitée par un séisme, elle oscille librement selon certains modes propres. Ces modes correspondent à l'existence d'ondes stationnaires de déformation dans la Terre. Dans cet exercice, on n'envisage qu'une déformation radiale dans une Terre homogène à symétrie sphérique : $\vec{u} = u(r)\,\vec{e}_r$.

Le champ des déformations dérive d'un potentiel ϕ, $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$, qui vérifie une équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

où $c = 6\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, le rayon terrestre étant $R_T = 6\,400$ km. On montre que, pour une onde sinusoïdale, ϕ est proportionnel à la surpression que l'on prendra nulle à la surface de la Terre.

1) Évaluer, sans calcul, l'ordre de grandeur des fréquences propres de la Terre.

2) On recherche une solution sous forme d'onde stationnaire : $\phi(r,t) = R(r)H(t)$, où R et H sont deux fonction *a priori* quelconques. Montrer qu'elles sont solutions d'équations différentielles indépendantes. Les résoudre et montrer que la solution générale est de la forme :

$$\phi(r,t) = \left[\frac{A}{r}\cos(Kr) + \frac{B}{r}\sin(Kr)\right]\cos(\omega t + \varphi).$$

3) Quelle relation lie ω et K ? Montrer que les conditions aux limites imposent une quantification des pulsations permises. Exprimer ces pulsations propres ω_n en fonction d'un entier n et du rayon R_T de la Terre.

4) Déterminer l'expression de la déformation $u_n(r,t)$ du mode n. Proposer une méthode graphique pour déterminer les positions des nœuds de déformation dans la Terre. Combien y en-a-t-il pour le mode n ?

5) En réalité, la symétrie sphérique est une hypothèse correcte, mais la structure radiale de la Terre n'est pas du tout homogène. Expliquer en quoi la mesure de la fréquence propre de chaque mode apporte des renseignements sur la structure de la Terre à différentes échelles de profondeur.

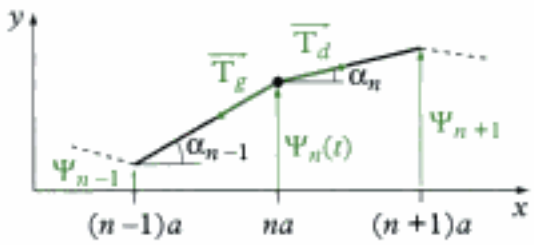
Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Considérons la masse n située à l'abscisse $x = na$.



On applique la relation fondamentale de la dynamique à cette masse en oscillation verticale :

$$m\,\ddot{\Psi}_n\,\vec{u}_y = \vec{T}_d + \vec{T}_g$$

où $\vec{T}_d$ et $\vec{T}_g$ sont respectivement les tensions du fil à droite et à gauche de la masse. D'après l'énoncé, on sait que : $\|\vec{T}_d\| = \|\vec{T}_g\| = T_0$. Ainsi :

$$\vec{T}_d + \vec{T}_g = T_0[\,(\cos\alpha_n - \cos\alpha_{n-1})\,\vec{u}_x + (\sin\alpha_n - \sin\alpha_{n-1})\,\vec{u}_y\,]$$

Sachant également que les déplacements Ψ_n restent faibles devant a, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \cos\alpha_n - \cos\alpha_{n-1} &\approx 0 \\ \sin\alpha_n - \sin\alpha_{n-1} &\approx \alpha_n - \alpha_{n-1} \\ \tan\alpha_n = \alpha_n \quad &\text{et} \quad \tan\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Dire que les déplacements transversaux sont faibles devant a signifie que les angles α_n sont petits.

En remarquant que :

$$\tan\alpha_n = \frac{\Psi_{n+1} - \Psi_n}{a} \quad \text{et} \quad \tan\alpha_{n-1} = \frac{\Psi_n - \Psi_{n-1}}{a}$$

il vient :

$$m\,\ddot{\Psi}_n = \frac{T_0}{a}\,(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1})$$

soit :

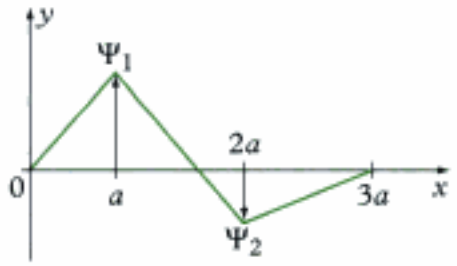
$$\boxed{\ddot{\Psi}_n + \omega_0^2\,(2\,\Psi_n - \Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}) = 0}$$

On retrouve dans cette équation une caractéristique de la propagation de proche en proche d'une déformation puisque le déplacement de la masse n dépend de ceux des masses $(n-1)$ et $(n+1)$.

2) a) Avec N = 2, les conditions aux limites qui traduisent que les extrémités de la corde sont fixes imposent :

$$\Psi_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_3(t) = 0 \quad \text{à tout instant.}$$

Copyrighted material



Les équations différentielles vérifiées par Ψ_1 et Ψ_2 sont :

$$\begin{cases} \ddot{\Psi}_1 + \omega_0^2 (2\Psi_1 - \Psi_2) = 0 \\ \ddot{\Psi}_2 + \omega_0^2 (2\Psi_2 - \Psi_1) = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont linéaires, sans second membre. Elles sont en outre couplées : Ψ_1 et Ψ_2 apparaissent dans les deux équations.

La linéarité nous autorise à adopter une représentation complexe et à rechercher des solutions sous la forme :

$$\underline{\Psi}_n = \underline{A}_n \, e^{j\omega t}.$$

Le système différentiel précédent devient alors :

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)\, \underline{A}_1 - \omega_0^2\, \underline{A}_2 = 0 \\ -\omega_0^2\, \underline{A}_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)\, \underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet des solutions non triviales (c'est-à-dire non nulles) que si ω vérifie la condition qui peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit : $2\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \omega_0^2$

⚠ Mathématiquement, cette condition revient à trouver les valeurs de ω pour lesquelles les deux équations du système ne sont pas linéairement indépendantes.

Les seules solutions physiques (pour lesquelles $\omega > 0$) de ces équations du second degré sont :

$$\omega_1 = \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0$$

b) Si $\omega = \omega_i$ $(i = 1,2)$, en reprenant l'une des équations du système, on obtient la relation :

$$(2\omega_0^2 - \omega_i^2)\, \underline{A}_1 = \omega_0^2\, \underline{A}_2$$

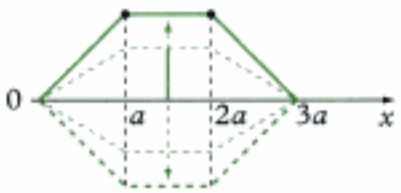
l'autre équation n'apportant pas de nouvelle information. D'où :

– si $\omega = \omega_1 = \omega_0$, alors $\underline{A}_1 = \underline{A}_2$

– si $\omega = \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0$, alors $\underline{A}_1 = -\underline{A}_2$

c) En notant $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\varphi}$, on en déduit deux ensembles de solutions :

• Si $\omega = \omega_1$, $\underline{\Psi}_1 = A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi)}$ et $\underline{\Psi}_2 = A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi)}$.



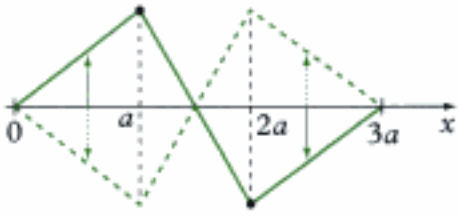
Puis, en représentation réelle :

$$\Psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad \text{et} \quad \Psi_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi).$$

Les deux masses oscillent en phase, avec la même amplitude.

Copyrighted material

• Si $\omega = \omega_2$, $\underline{\Psi}_1 = A_1 e^{j(\omega_2 t + \varphi)}$ et $\underline{\Psi}_2 = A_1 e^{j(\omega_2 t + \varphi + \pi)}$.



Puis en représentation réelle :

$\Psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi)$ et $\Psi_2(t) = -A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi)$.

Les deux masses oscillent en opposition de phase, avec la même amplitude.

d) Pour que la chaîne oscille dans l'un des modes propres, il faut des conditions initiales particulières. Si ces conditions sont quelconques, l'oscillation de la chaîne est une combinaison linéaire des deux modes propres. La solution générale Ψ_n s'écrit alors :

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t) + A_{12} \cos(\omega_2 t) \\ \Psi_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t) + A_{22} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

les coefficients A_{ij} étant donnés par les conditions initiales (position initiale et vitesse initiale de chaque masse).

Pour s'en convaincre, on peut remarquer que si :

$$\Psi_1(0) = \Psi_{10}, \quad \Psi_2(0) = \Psi_{20}$$

on peut toujours écrire :

$$\begin{cases} \Psi_{10} = S + A \\ \Psi_{20} = S - A \end{cases}$$

avec $S = \dfrac{\Psi_{10} + \Psi_{20}}{2}$ et $A = \dfrac{\Psi_{10} - \Psi_{20}}{2}$. La linéarité de la solution permet alors d'associer le mode propre ω_1 à S, le mode propre ω_2 à A.

3) a) Avec à présent $\Psi(t) = A_0 \cos(\omega t)$, le système différentiel devient :

$$\begin{cases} \ddot{\Psi}_1 + \omega_0^2 (2\Psi_1 - \Psi_2) = \omega_0^2 A_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{\Psi}_2 + \omega_0^2 (2\Psi_2 - \Psi_1) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire du second ordre, avec second membre. Sa solution générale est une combinaison linéaire de la solution du système homogène (sans second membre) et d'une solution particulière. La première n'est autre que la combinaison des modes propres. La seconde, en raison de la linéarité du problème, peut être recherchée sous la forme $\underline{\Psi}_n = \underline{A}_n e^{j\omega t}$, en représentation complexe. D'où :

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)\, \underline{A}_1 - \omega_0^2\, \underline{A}_2 = \omega_0^2 A_0 \\ -\omega_0^2\, \underline{A}_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)\, \underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

qui donne :

$$\begin{cases} \underline{A}_1 = \dfrac{2 - x^2}{(2 - x^2)^2 - 1} A_0 \\ \underline{A}_2 = \dfrac{1}{(2 - x^2)^2 - 1} A_0 \end{cases}$$

où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite.

Les calculs sont un peu fastidieux, mais ne présentent aucune difficulté. On remarque que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ sont réels.

Copyrighted material

Le déplacement de chacune des deux masses peut ainsi s'écrire :

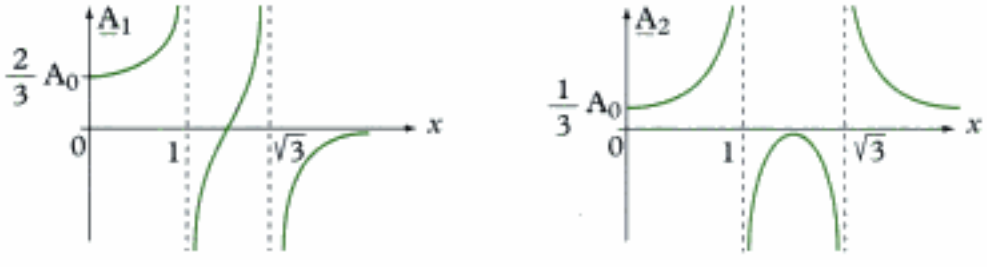
$$\Psi_1(t) = A_{11}\cos(\omega_1 t) + A_{12}\cos(\omega_2 t) + \frac{2-x^2}{\left(2-x^2\right)^2-1}A_0\cos(\omega t)$$

$$\Psi_2(t) = A_{21}\cos(\omega_1 t) + A_{22}\cos(\omega_2 t) + \frac{1}{\left(2-x^2\right)^2-1}A_0\cos(\omega t)$$

b) Les expressions précédentes de $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ montrent que les amplitudes divergent dès que :

$(2 - x^2)^2 - 1 = 0$, soit : $x = 1$ ou $x = \sqrt{3}$ ou encore, pour $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$.

Ainsi, si la pulsation excitatrice ω prend l'une des valeurs des modes propres, l'amplitude des oscillations croît indéfiniment. Ce phénomène est appelé **résonance**. Si théoriquement il conduit à des oscillations d'amplitudes infinies, en pratique, l'existence inévitable de frottements et celle de phénomènes non linéaires limitent l'amplitude des oscillations. Ils n'interdisent pas cependant la possibilité aux amplitudes de prendre des valeurs telles que le système puisse être endommagé. Dans notre problème, on peut tracer l'allure de $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ en fonction de x.



⚠ En effet, dès que l'amplitude devient « grande », la théorie que nous avons développée cesse d'être valable puisqu'alors Ψ_n n'est plus très petit devant a. Toutes les approximations faites en début d'exercices doivent être abandonnées au profit d'une modélisation non linéaire qui ne permet plus de trouver de solution analytique.

4) On suppose à présent que $N \to \infty$. La distance L restant fixe, la distance $a = \frac{L}{N+1}$ entre les masses devient de plus en plus petite. Cependant, le produit $(N + 1)\,a$ tend vers L. C'est la limite continue. Toutes les masses sont infinitésimalement proches les unes des autres. On peut remplacer la chaîne discrète par une chaîne continue de masses, le déplacement de l'élément de longueur a de chaîne, de masse linéique $\mu = \frac{M}{L}$, étant noté $\Psi(x,t)$. Ainsi : $\Psi_n(t) = \Psi(na, t)$.

L'équation d'évolution de Ψ_n :

$$\ddot{\Psi}_n - \frac{T_0}{m}\,\frac{\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}}{a} = 0$$

devient :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{a\,T_0}{m}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0$$

en utilisant le fait que :

$$\Psi_{n+1} - 2\,\Psi_n + \Psi_{n-1} = a^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)(x = na).$$

Copyrighted material

Enfin, en notant que : $\lim_{N\to\infty} \frac{m}{a} = \mu$, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0}$$

équation de d'Alembert de la chaîne continue (corde), la vitesse de propagation de l'onde étant $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

Il y a de plus en plus de masses sur la chaîne, mais chaque masse est de plus en plus petite. En revanche, le rapport $\frac{m}{a}$ reste fini puisque $\frac{m}{a} = \frac{N+1}{N}\frac{M}{L}$ qui tend vers μ quand $N \to \infty$.

Le passage à la limite continue entraîne aussi une augmentation du nombre de modes propres qui devient également infini (dénombrable).

C'est dans un tel contexte que l'analyse de Fourier s'introduit. L'exercice suivant en propose une illustration.

Exercice 2

• L'équation d'évolution de Ψ est l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0}, \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Cf. exercice 1 pour démonstration.

Les conditions initiales sont, en tout point :

$$\Psi(x,0) = u(x) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)(x,0) = 0.$$

Les conditions aux limites sont, à tout instant :

$$\Psi(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(L,t) = 0.$$

• En raison de la nature des conditions aux limites et de la linéarité de l'équation, on peut rechercher des solutions sous la forme :

$$\boxed{\Psi(x,t) = X(x) \cos(\omega t + \varphi)}$$

La corde étant attachée à ses extrémités, la solution en termes d'ondes stationnaires est mieux adaptée que la solution en termes d'ondes progressives.

La fonction X vérifie alors l'équation :

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0$$

dont la solution générale est de la forme :

$$\boxed{X(x) = X_m \cos(kx + \varphi)}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, module du vecteur d'onde. Ainsi :

$$\Psi(x,t) = X_m \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \varphi).$$

Copyrighted material

• Appliquons à présent les conditions aux limites :

$$\Psi(0,t) = 0 \rightarrow X_m \cos\phi \cos(\omega t + \varphi) = 0$$
$$\Psi(L,t) = 0 \rightarrow X_m \cos(kL + \phi) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

D'où :

$$X_m \cos\phi = 0 \quad \text{et} \quad X_m \cos(kL + \phi) = 0.$$

X_m ne pouvant pas être nul, on a :

$$\cos\phi = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL + \phi) = 0.$$

⚠ On recherche une solution autre que la solution triviale.

La première condition impose :

$$\phi = \frac{\pi}{2} + p\pi \ (p \in \mathbb{Z})$$

et la seconde condition impose :

$$kL + \phi = \frac{\pi}{2} + q\pi \ (q \in \mathbb{Z})$$

d'où le vecteur d'onde :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}, \quad \text{où } n = q - p \text{ est un nombre entier.}$$

Le vecteur d'onde k ne peut donc prendre que des valeurs multiples de $\frac{\pi}{L}$. Il est quantifié. Il en est de même de la pulsation ω introduite *a priori*, puisque $\omega = kc$. D'où :

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}.$$

Il en résulte une infinité dénombrable de solutions indicées par l'entier n. Posons :

$$\boxed{\Psi_n(x,t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

En raison de la relation $\Psi_{-n}(x,t) = -\Psi_n(x,t)$, les modes propres associés aux valeurs négatives de n ne constituent pas des solutions linéairement indépendantes des modes propres associés aux valeurs positives de n. C'est pourquoi on ne retient que les valeurs de n positives.

Toutes ces solutions constituent des modes propres d'oscillations de la corde. La solution générale $\Psi(x,t)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces modes propres. En effet, la linéarité du problème donne :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le déphasage φ_n dépendant, *a priori*, de n avec $\varphi_{-n} = \varphi_n$. En développant le cosinus, cette expression se met sous la forme :

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2X_n \cos\varphi_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(x,t)}$$

avec $A_n = 2X_n \cos\varphi_n$. Ces derniers coefficients sont donnés par les conditions initiales non encore exploitées.

Copyrighted material

• D'après les conditions initiales, on a donc :

$$\Psi(x,0) = u(x) \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u(x)$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)(x,0) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{égalité trivialement vérifiée.}$$

Il ne reste qu'à déterminer les coefficients X_n à partir de la première égalité. Ceci peut être fait en utilisant l'identité :

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}\delta_{np}$$

où n et p sont des entiers, et $\delta_{np} = 1$ si $n = p$, 0 si $n \neq p$. Ainsi, on trouve :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x) \sin(k_n x)\, dx .$$

Cette astuce trouve son origine dans l'analyse de Fourier. C'est en fait cette technique qui permet de justifier tous les calculs développés dans l'exercice. Pour l'intégration, on utilise :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

Avec la forme initiale de la corde proposée dans l'énoncé, on a :

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\alpha L}\, x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \alpha L \\ \dfrac{A}{(1-\alpha)L}(L - x) & \text{si } \alpha L \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Après quelques calculs, on trouve alors :

$$X_n = \frac{2A}{\pi^2} \times \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \times \frac{\sin(\pi\alpha n)}{n^2}$$

Les calculs sont un peu fastidieux, mais ne présentent aucune difficulté.

Ce qui donne finalement l'expression de la solution :

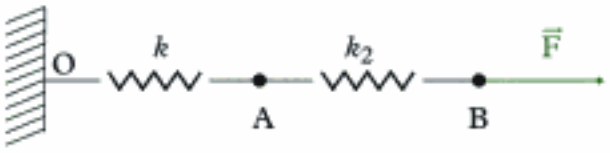
$$\Psi(x,t) = \frac{2A}{\pi^2} \times \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\alpha n)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Copyrighted material

Exercices de niveau 2

Exercice 3

1) Considérons deux ressorts de raideur k_1 et k_2 respectivement, mis bout à bout.



Si une force de traction $\vec{F}$ est exercée à l'une des extrémités du ressort, l'autre extrémité restant fixe, l'ensemble des deux ressorts s'allonge de :

$$\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2,$$

où $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ sont les allongements respectifs de chaque ressort.

Au point A, la force exercée par le ressort de droite sur celui de gauche a encore pour valeur F.

Ainsi :

$$F = k_1 \Delta\ell_1 \quad \text{et} \quad F = k_2 \Delta\ell_2, \quad \text{d'où :} \quad \Delta\ell = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F .$$

Le système est donc équivalent à un seul ressort de raideur k tel que :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Si les deux ressorts sont identiques, de raideur $k_0 = k_1 = k_2$, on a :

$$k_0 = 2k.$$

En renversant le raisonnement précédent, un ressort de raideur k peut être vu comme deux ressorts identiques de raideur k_0 chacun, mis bout à bout. On a alors $k_0 = 2k$. On remarque que plus le ressort est court, plus sa raideur est grande.

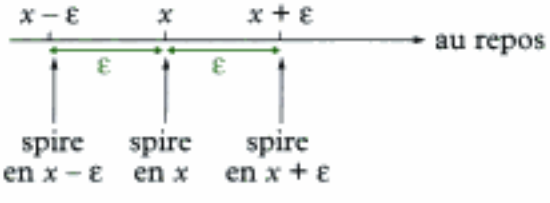
En décomposant le ressort de raideur en N ressorts identiques de raideur k_e, on a alors :

$$k_e = Nk$$

où $N = \frac{L}{\varepsilon}$, ε désignant la longueur à vide d'un ressort. Ainsi :

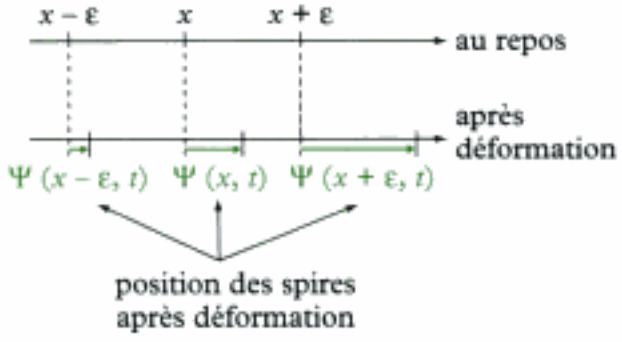
$$\boxed{k_e = \frac{kL}{\varepsilon}}.$$

2) Considérons une spire située à l'abscisse x au repos. Pour simplifier le schéma, nous ne dessinons pas la spire.



Copyrighted material

Quand le ressort se déforme, la situation est la suivante :



La spire située en x au repos est soumise à :
– une force $\vec{F}_d$ exercée par la tranche de droite :

$$\vec{F}_d = k_\ell \left[\Psi(x+\varepsilon, t) - \Psi(x,t) \right] \vec{u}_x ;$$

– une force $\vec{F}_g$ exercée par la tranche de gauche :

$$\vec{F}_g = k_\ell \left[\Psi(x,t) - \Psi(x-\varepsilon,t) \right] \times (-\vec{u}_x) .$$

D'où la force totale $\vec{F}$ exercée par les tranches voisines : $\vec{F} = \vec{F}_d + \vec{F}_g$, soit :

$$\vec{F}(x,t) = k_\ell \underbrace{\left[\Psi(x+\varepsilon,t) - 2\Psi(x,t) + \Psi(x-\varepsilon,t) \right]}_{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t)} \vec{u}_x$$

qui s'écrit, sachant que $k_\ell = \dfrac{k\mathrm{L}}{\varepsilon}$:

$$\boxed{\vec{F}(x,t) = \varepsilon\, k\mathrm{L}\, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t)}$$

3) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une tranche d'épaisseur ε, on a :

$$\mu\, \varepsilon\, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \varepsilon\, k\mathrm{L}\, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

qui donne l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2\, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0}$$

avec $c = \sqrt{\dfrac{k\mathrm{L}}{\mu}}$, vitesse de propagation de l'onde.

4) a. • Avec une solution de la forme :

$$\Psi(x,t) = \mathrm{X}(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

il vient :

$$\mathrm{X}''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\, \mathrm{X}(x) = 0 .$$

Copyrighted material

D'où : $X(x) = X_m \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)$, puis :

$$\Psi(x,t) = X_m \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)\cos(\omega t + \varphi)$$

• Les conditions aux limites sont les suivantes :

– L'extrémité O est fixe : $\Psi(0,t) = 0$.

– La masse m accrochée à l'extrémité libre du ressort est soumise à une force de rappel exercée par le ressort. Cette force n'est autre que la force exercée par la dernière tranche du ressort sur la spire de l'extrémité :

$$k_\ell\left[\Psi(L,t) - \Psi(L-\varepsilon,t)\right]\vec{u}_x, \text{ soit : } -\varepsilon\, k_\ell \frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t)\,\vec{u}_x.$$

D'où, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à m :

$$m\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(L,t) = -kL\frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t)$$

• La première condition aux limites donne :

$$X_m \cos\phi = 0$$

d'où $\phi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$. En prenant $\phi = -\frac{\pi}{2}$, il vient alors :

$$\Psi(x,t) = X_m \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\cos(\omega t + \varphi).$$

La seconde condition aux limites donne :

$$-m\,\omega^2 \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = -kL\,\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right).$$

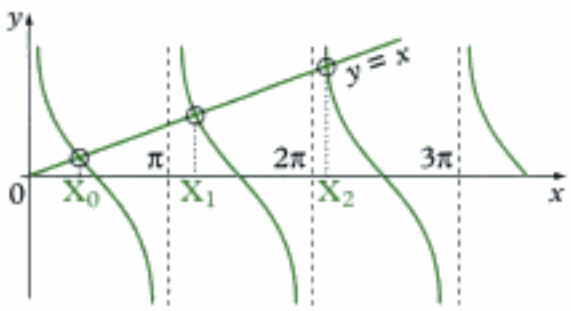
Avec $kL = \mu c^2$, cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{X = \alpha \operatorname{cotan} X}$$

avec $X = \frac{\omega L}{c}$, $\alpha = \frac{\mu L}{m}$.

La pulsation ω ne peut donc prendre que des valeurs discrètes, qui sont déduites des solutions de cette équation.

b. Traçons l'allure des courbes représentatives de $X \mapsto \alpha \operatorname{cotan} X$ et de $X \mapsto X$.



Copyrighted material

Dans chaque intervalle $[p\pi, (p+1)\pi]$, $p \in \mathbb{N}$, la courbe de $\alpha \operatorname{cotan} X$ coupe une seule fois la première bissectrice. D'où l'existence de pulsations propres :

$$\omega_p = \frac{cX_p}{L}.$$

Sans valeurs de α, il n'est pas possible d'obtenir de valeurs approchées pour les pulsations propres de faible valeur. En revanche, pour p assez grand, on constate que $X_p \approx p\pi$, d'où :

$$\boxed{\omega_p = p\,\frac{\pi c}{L}}$$

c. Pour m fixée, si $\mu \to 0$, on peut écrire, sachant que $c = \sqrt{\frac{kL}{\mu}}$:

$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{\omega L}{c}.$$

La relation $X = \alpha \operatorname{cotan} X$ devient alors :

$$X^2 = \alpha, \quad \text{soit :} \quad \omega^2 L^2 = \frac{\mu L}{m} \times \frac{kL}{\mu}$$

qui laisse :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Il s'agit de la pulsation propre d'un oscillateur constitué d'une masse m accrochée à un ressort sans masse de raideur k.

Exercice 4

1) En appliquant les lois de l'électrocinétique, on peut écrire, pour un élément de circuit de longueur dx :

– aux bornes de la bobine d'inductance Λdx en convention récepteur :

$$u(x,t) - u(x+dx,t) = \Lambda dx \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)(x,t)$$

soit, à l'ordre 1 en dx :

$$\boxed{-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \Lambda \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)}$$

La tension aux bornes de la bobine est donnée par la loi des mailles.

– aux bornes du condensateur de capacité $\Gamma\, dx$ en convention récepteur :

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = \Gamma\, dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,t)$$

soit, à l'ordre 1 en dx :

$$\boxed{-\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) = \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}$$

Le courant traversant le condensateur est donnée par la loi des nœuds.

Copyrighted material

2) En dérivant la première relation par rapport à x, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)$$

soit encore :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)$$

puis, grâce à la seconde relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

qui donne finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

On trouve évidemment la même équation pour i.

3) a. Avec une onde incidente progressive de la forme : $u_p(x,t) = f(x - ct)$, on a :

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial t}\right) = -c \; f'(x - ct)$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial i_p}{\partial x}\right) = \Gamma c \; f'(x - ct)$$

puis :

$$i_p(x,t) = \Gamma c \; f(x - ct).$$

On en déduit l'expression de l'impédance :

$$Z_p(x) = \frac{u_p(x,t)}{i_p(x,t)} = \frac{1}{\Gamma c}$$

constante.

Avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$, il reste :

$$\boxed{Z_p = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c}.$$

On a aussi : $Z_p = \Lambda c$.

b. En procédant de la même façon avec une onde régressive de la forme $u_r(x,t) = g(x + ct)$, il vient :

$$\boxed{Z_r = -Z_c}$$

4) a. En fermant la ligne à l'une de ses extrémités par une impédance Z', la situation est à présent la suivante :



Copyrighted material

Si seule une onde progressive se propage vers l'impédance Z', alors en $x = a$, on devrait avoir $Z' = Z_c$. En général, $Z' \neq Z_c$. Donc, une onde régressive doit venir se superposer à l'onde progressive pour que $Z(a) = Z'$. Or :

$$Z(a) = \frac{u(a,t)}{i(a,t)}$$

avec $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ et, en reprenant les calculs de la question précédente :

$$i(u,t) = \frac{1}{Z_c}\left[f(x-ct) - g(x+ct)\right] \cdot$$

La condition $Z(a) = Z'$ donne alors :

$$Z_c\left[f(a-ct) + g(a+ct)\right] = Z'\left[f(a-ct) - g(a+ct)\right]$$

qui donne l'expression de g en fonction de celle de f et des impédances. On a :

$$g(a+ct) = \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f(a-ct) \cdot$$



On peut remarquer que si $Z' = Z_c$, il n'y a plus d'onde régressive (onde réfléchie).

En notant enfin que :

$$g(x+ct) = g\left[a + (ct + x - a)\right]$$

il vient :

$$g(x+ct) = \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f\left[a-(ct+x-a)\right]$$

soit :

$$g(x+ct) = \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f\left[2a-x-ct\right].$$

Finalement :

$$\begin{aligned} u_r(x,t) &= \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f(2a-x-ct) \\ i_r(x,t) &= -\frac{u_r(x,t)}{Z_c} \end{aligned}$$

b. La tension totale est alors :

$$u(x,t) = f(x-ct) + \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f(2a-x-ct)$$

et le courant total :

$$i(x,t) = \frac{1}{Z_c}\left[f(x-ct) - \frac{Z'-Z_c}{Z'+Z_c} f(2a-x-ct)\right]$$

Copyrighted material

c. On en déduit l'impédance de la ligne :

$$Z(x) = Z_c \frac{1 + \dfrac{Z' - Z_c}{Z' + Z_c} \times \dfrac{f(2a - x - ct)}{f(x - ct)}}{1 - \dfrac{Z' - Z_c}{Z' + Z_c} \times \dfrac{f(2a - x - ct)}{f(x - ct)}}$$

d. • En représentation complexe, avec :

$$f(x - ct) = u_m \, e^{j(\omega t - kx)}$$

il vient :

$$Z(x) = Z_c \frac{1 + \dfrac{Z' - Z_c}{Z' + Z_c} \, e^{-jk(2a - 2x)}}{1 - \dfrac{Z' - Z_c}{Z' + Z_c} \, e^{-jk(2a - 2x)}}$$

Soit :

$$Z(x) = Z_c \, \frac{Z' \cos\left[k(a - x)\right] - j \, Z_c \sin\left[k(a - x)\right]}{Z_c \cos\left[k(a - x)\right] - j \, Z' \sin\left[k(a - x)\right]}$$

On utilise les expressions complexes : $\cos x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2i}$.

Finalement :

$$Z(x) = Z_c \, \frac{Z' - j \, Z_c \tan\left[k(a - x)\right]}{Z_c - j \, Z' \tan\left[k(a - x)\right]}$$

• Dans le cas particulier de la ligne ouverte, on trouve :

$$Z(x) = j \, \frac{Z_c}{\tan\left[k(a - x)\right]}$$

Il est intéressant de reprendre les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$. On a :

$$\underline{u}(x,t) = u_m \, e^{j(\omega t - kx)} + u_m \, e^{j(\omega t + kx - 2ka)}$$

qui peut s'écrire :

$$\underline{u}(x,t) = 2u_m \, e^{j(\omega t - ka)} \cos\left[k(x - a)\right]$$

En représentation réelle :

$$u(x,t) = 2u_m \cos(\omega t - ka) \cos\left[k(x - a)\right].$$

On obtient de la même façon l'expression du courant :

$$i(x,t) = \frac{2u_m}{Z_c} \sin(\omega t - ka) \sin\left[k(x - a)\right].$$

La ligne est le siège d'ondes stationnaires où les nœuds de la tension correspondent aux ventres du courant et inversement.

Copyrighted material

• Dans le cas du court-circuit, on a :

$$\boxed{Z(x) = -j\, Z_c \tan\left[k(a-x)\right]}$$

En reprenant la même analyse que précédemment, on montre que la ligne est encore le siège d'ondes stationnaires où les nœuds et les ventres sont permutés par rapport à la situation précédente.

En effet, on obtient :

$$u(x,t) = f(x-ct) - f(2a-x-ct) \quad \text{et} \quad i(x,t) = \frac{1}{Z_c}\left[f(x-ct) + f(2a-x-ct)\right].$$

Exercice 5

1) D'après l'énoncé, l'écoulement est irrotationnel. Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Avec : $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Sachant que $v_z = 0$ et que v_x et v_y ne dépendent pas de y, il reste :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0\,.$$

v_x et v_y sont indépendants de z. Donc :

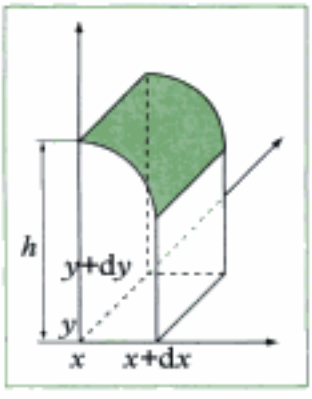
$$\boxed{\vec{v} = v_x(x,t)\vec{u}_x + v_y(x,t)\vec{u}_y}$$

2) Raisonnons sur une colonne verticale de fluide, de section $dS = dx\,dy$. Dans un intervalle de temps dt, la variation de masse dans la colonne de fluide est :

$$m(t+dt) - m(t) = \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)dt \text{ , avec } m = \rho_0\, dx\, dy\, h\,.$$

D'où :

$$m(t+dt) - m(t) = \rho_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) dx\, dy\, dt\,.$$



D'autre part, cette variation de masse est due à l'entrée de fluide et à la sortie de fluide dans cette colonne. Ainsi :

$$m(t+dt) - m(t) = \rho_0\, dy \left[h(x,y,t)\, v_x(x,t)\, dt - h(x+dx, y, t)\, v_x(x+dx,t)\, dt\right]$$

$$+ \rho_0\, dx \left[h(x,y,t)\, v_y(x,t)\, dt - h(x, y+dy, t)\, v_y(x,t)\, dt\right].$$

Copyrighted material

À l'ordre le plus bas en dx dy, il reste :

$$m\left(t+\mathrm{d}t\right) - m\left(t\right) = \rho_0 \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\left[-\frac{\partial\left(h v_x\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(h v_y\right)}{\partial y}\right]$$

D'où finalement :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) = -\mathrm{div}\ (h\vec{v})$$

soit encore :

$$\boxed{\mathrm{div}\left[\left(\mathrm{H}+\xi\right)\ \vec{v}\right] + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = 0}$$

3) L'équation d'Euler est :

$$\boxed{\rho_0\left[\frac{\overrightarrow{\partial v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right] = \rho_0\ \vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p}\ .$$



Cf. cours de mécanique des fluides.

En projection sur les axes Ox, Oy, Oz, on obtient :

$$\begin{cases} \rho_0\left[\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right] = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_0\left[\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right] = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\rho_0\, g - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

La dernière équation s'intègre directement pour donner :

$$p\ (x,y,z,t) = -\rho_0 g z + f(x,y,t)$$

où f est une fonction déterminée par la conditon :

$$p(x,y,h,t) = p_0$$

où p_0 est la pression à la surface libre du fluide. D'où :

$$p_0 = -\rho_0 g h(x,y,t) + f(x,y,t).$$

Ainsi, on trouve $f(x,y,t) = p_0 + \rho_0 g h(x,y,t)$, puis :

$$\boxed{p\ (x,y,z,t) = \rho_0\ g\left[\mathrm{H} + \xi - z\right] + p_0}\ .$$

4) L'énoncé nous invite à ne conserver que les termes d'ordre 1 en $\vec{v}$ et ξ dans les équations précédemment établies. Cela revient à négliger tous les termes quadratiques :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} \quad \text{et} \quad \xi\,\vec{v}\,.$$

Copyrighted material

On obtient ainsi les équations de couplage linéarisées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \mathrm{H}\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \vec{g} \end{cases}$$

avec l'expression de p obtenue ci-dessus.

Finalement, il reste :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathrm{H}\ \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \xi = 0 \end{aligned}}$$

En effet, on a : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ p = \rho_0\, g\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \xi - \rho_0\, g\, \vec{u}_z$.

5) • On peut alors découpler les équations en écrivant :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mathrm{H}\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\mathrm{H}\,\mathrm{div}\left(-g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \xi\right)$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g\mathrm{H}\ \Delta\xi = 0}$$

ξ est solution d'une équation de d'Alembert, la vitesse de propagation c des ondes de gravité étant :

$$\boxed{c = \sqrt{g\mathrm{H}}}$$

• De la même façon, on a :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = -g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left(-\mathrm{H}\ \mathrm{div}\ \vec{v}\right)$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - g\mathrm{H}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left(\mathrm{div}\ \vec{v}\right).$$

En utilisant l'identité :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\ \vec{v}\right) - \Delta\vec{v}$$

sachant que l'écoulement est irrotationnel $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}\right)$, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2\ \Delta\vec{v} = \vec{0}}$$

$\vec{v}$ est solution d'une équation de d'Alembert également, avec la même vitesse de propagation c des ondes de gravité que précédemment.

Copyrighted material

Exercice 6

1) Avec une vitesse de propagation des oscillations dans la Terre $c = 6\ \text{km}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, une estimation de la durée de cette propagation pour des ondes se propageant du centre vers la surface est :

$$T = \frac{R_T}{c}\ ,\ R_T \text{ désignant le rayon terrestre.}$$

D'où l'ordre de grandeur de la fréquence :

$$\boxed{f = \frac{c}{R_T}}$$

Numériquement, on trouve, avec $c = 6 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}$: $\boldsymbol{f \approx 10^{-3}\ \text{Hz}}$.

2) L'équation de d'Alembert proposée dans l'énoncé s'écrit :

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = 0.$$

On recherche des solutions stationnaires bornées sous la forme : $\phi(r,t) = R(r)\,H(t)$. D'où :

$$r\,R(r)\,\ddot{H}(t) - c^2\,H(t)\,\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\ddot{H}(t)}{H(t)} = c^2\,\frac{1}{rR(r)}\,\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)).$$

Le membre de gauche de l'équation dépend de t, le membre de droite de r. Ils sont donc constants. En outre, pour que la solution reste bornée, la constante doit être négative. Notons-la $-\omega^2$:

$$\begin{cases} \ddot{H}(t) + \omega^2\,H(t) = 0 \\ \dfrac{d^2(rR(r))}{dr^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\,rR(r) = 0 \end{cases}$$

On déduit de la première équation :

$$H(t) = H_m \cos(\omega t + \varphi)$$

et de la seconde équation :

$$rR(r) = \lambda \cos(Kr) + \mu \sin(Kr),\ K = \frac{\omega}{c}$$

où H_m, φ, λ, μ sont des constantes. Finalement :

$$\boxed{\phi(r,t) = \left[\frac{A}{r}\cos(Kr) + \frac{B}{r}\sin(Kr)\right]\cos(\omega t + \varphi)}$$

⚠ Les fonctions $H(t)$ et $rR(r)$ vérifient la même équation différentielle. Dans l'écriture générale de la solution, il est équivalent de poser un déphasage φ ou de prendre une combinaison linéaire de cos et de sin. Ici, c'est l'énoncé qui impose l'écriture choisie.

3) On a établi à la question précédente que :

$$\boxed{\omega = Kc}$$

Les conditions aux limites imposent que φ reste fini en $r = 0$. D'où $A = 0$. φ étant proportionnel à la surpression, l'énoncé précise que cette dernière est nulle en $r = R_T$, ce qui entraîne : $\sin(KR_T) = 0$.

Copyrighted material

D'où la relation : $KR_T = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$), relation qui impose une quantification des pulsations permises :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{R_T}$$

4) Pour le mode propre n, le potentiel s'écrit :

$$\phi_n(r,t) = \frac{B_n}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{R_T} r\right) \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right).$$

Le champ des déformations $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ est alors :

$$u_n = \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial r}\right)$$

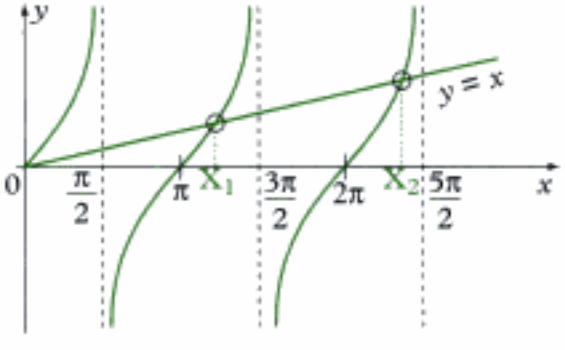
soit :

$$u_n = \frac{B_n}{r}\left[\frac{n\pi}{R_T}\cos\left(\frac{n\pi}{R_T} r\right) - \frac{1}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{R_T} r\right)\right]\cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right)$$

Les positions des nœuds sont données par la condition : $u_n = 0$, à tout instant. D'où :

$$\mathbf{\tan X = X}$$

avec $X = \frac{n\pi r}{R_T}$, sachant que r doit rester inférieur à R_T. Pour déterminer graphiquement les valeurs de r solutions de $\tan X = X$, on recherche les intersections des courbes représentatives de X et tan X.



On détermine ainsi les valeurs de X_1, X_2, etc. En remarquant qu'il n'y a qu'une seule solution dans chaque intervalle $\left[p\pi,\ (p+1)\pi\right]$, $p \in \mathbb{N}$, dans l'intervalle $\left[0,\ (p+1)\pi\right]$, il y a donc (p + 1) solutions. La contrainte $r_{p\,max} \leqslant R_T \leqslant r_{p\,max+1}$ impose :

$$X_{p\,max} \leqslant \pi\, n \leqslant X_{p\,max+1}.$$

Or : $X_{p\,max} \leqslant \pi\,(p_{max} + 1) \leqslant X_{p\,max+1}$.

On trouve ainsi que :

$$n = p_{max} + 1.$$

Il y a donc ***n* nœuds de déformation** pour le mode n.

5) Si la Terre n'est plus homogène, la vitesse de propagation c varie en fonction de la profondeur. Elle entraîne donc une modification de la valeur de la pulsation propre ω_n. La valeur mesurée, différente de la valeur associée au modèle homogène, apporte des renseignements sur la structure de la Terre à une certaine profondeur.

Copyrighted material

CHAPITRE

2 Ondes sonores dans les fluides

Ouverture

L'objet de ce chapitre est de décrire la propagation des ondes sonores en s'appuyant sur les notions introduites pour les phénomènes unidimensionnels, tout en mettant en avant le caractère tridimensionnel du phénomène. C'est également l'occasion de montrer que le concept d'onde peut concerner simultanément plusieurs grandeurs physiques tant scalaires que vectorielles.

Plan du chapitre 2

A. Équations d'onde
1. Le son 52
2. Nature de l'approximation acoustique 52
3. Équations de couplage linéaires 53
4. Équations de propagation 54

B. Ondes sonores planes
1. Ondes planes progressives 56
2. Structure des ondes planes progressives 56
3. Impédance acoustique 57
4. Ordres de grandeur 58

C. Aspects énergétiques
1. Densité de courant d'énergie 59
2. Densité volumique d'énergie 60
3. Énergie d'une OPPH 61
4. Énergie d'une onde stationnaire 61
5. Ordres de grandeurs 62
6. Retour sur les hypothèses 63

D. Réflexion et transmission
1. Conditions aux limites 64
2. Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude 65
3. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance 66

Méthodes 67

Exercices 73

Copyrighted material

A. Équations d'onde

A.1. Le son

Un son est une sensation auditive engendrée par la vibration d'un corps. Il est transmis par les milieux matériels qu'il peut déformer pour se propager. C'est l'élasticité de ces milieux qui lui permet de se propager depuis une source sonore sous forme d'ondes. Dans le cas de l'air, le son se propage sous forme d'une variation de pression que lui communique par exemple un haut-parleur. Cette variation de pression se propage dans l'air, mais sans propagation d'air[1].

1. Au cours de la propagation d'une onde mécanique, il se produit un transfert d'énergie sans transport de matière.

D'un point de vue physique, une onde sonore peut être décrite comme une perturbation mécanique qui modifie localement les propriétés du milieu dans lequel elle se propage. Dans le cas d'un fluide compressible, ces propriétés sont la pression $p_{totale}(x, y, z, t)$ qui s'exerce sur une particule mésoscopique[2] de fluide, sa masse volumique $\rho_{totale}(x, y, z, t)$, sa température $T_{totale}(x, y, z, t)$ et sa vitesse $\vec{v}_{totale}(x, y, z, t)$.

2. L'échelle mésoscopique est grande devant les dimensions atomiques (échelle microscopique), mais petite devant les dimensions des agrégats de matière (échelle macroscopique). Typiquement, elle est de l'ordre de 10^{-6} m.

Généralement, la température est donnée par l'équation d'état du fluide, supposée vérifiée à l'échelle de la particule fluide. Puisque la température T_{totale} s'exprime en fonction de la pression p_{totale} et de la masse volumique ρ_{totale}, on privilégie la description du fluide en termes de pression, de masse volumique et de vitesse.

A.2. Nature de l'approximation acoustique

Notons p_0 la pression et ρ_0 la masse volumique dans le fluide à l'équilibre, supposées uniformes. On néglige l'influence de la pesanteur sur le phénomène sonore. Ces hypothèses sont raisonnables pour un liquide ou un solide. Dans le cas d'un gaz, elles le sont encore tant que l'on considère des petites couches verticales de gaz pour pouvoir négliger l'influence de la pesanteur.

L'onde sonore peut être décrite en chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace et à chaque instant t par les champs de **pression**, de **masse volumique** et de **vitesse** :

$$\begin{cases} p_{totale}(x,y,z,t) = p_0 + p(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle p \rangle = 0 \\ \rho_{totale}(x,y,z,t) = \rho_0 + \rho(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle \rho \rangle = 0 \\ \vec{v}_{totale}(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle \vec{v} \rangle = \vec{0} \end{cases}$$

3. On rappelle que la notation $\langle\ \rangle$ désigne une valeur moyenne temporelle.

ρ est la masse volumique (en $kg \cdot m^{-3}$), p la **surpression** (ou pression acoustique) (en Pa) et $\vec{v}$ la vitesse de la particule fluide (en $m \cdot s^{-1}$).

Dans la description de l'onde sonore, on se limite à des calculs à l'ordre 1, ce qui constitue une approximation dont il faut vérifier la validité *a posteriori*. Cette approximation, appelée **approximation acoustique**, permet d'écrire des équations linéaires.

Dans le cadre de cette approximation, p et ρ sont donc des infiniment petits du premier ordre, ce qu'on traduit par les inégalités :

$$|p| << p_0 \quad \text{et} \quad |\rho| << \rho_0 .$$

Il est plus délicat d'émettre une hypothèse sur $\vec{v}$, puisque la vitesse ne peut pas être comparée à une vitesse de référence. On doit donc faire une hypothèse supplémentaire dont on vérifiera, là encore, la validité *a posteriori* : on suppose que $\vec{v}$ est un infiniment petit du premier ordre.

Copyrighted material

A.3. Équations de couplage linéaires

A.3.1. Hypothèse adiabatique

Si la perturbation se fait suffisamment rapidement pour pouvoir négliger les transferts thermiques entre particules fluides voisines, ces dernières évoluent de manière adiabatique. En considérant le fluide comme parfait pour négliger les phénomènes dissipatifs, l'évolution est réversible. Les particules évoluent donc de manière **isentropique**. Ce dernier résultat permet d'établir une relation linéaire entre p et ρ.

• L'entropie massique s d'une particule fluide étant une fonction de p_{totale} et ρ_{totale}, donc de p et de ρ, on a :

$$ds = \frac{\partial s}{\partial p}dp + \frac{\partial s}{\partial \rho}d\rho .$$

Puisque l'évolution est isentropique ($ds = 0$), on peut écrire le rapport :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = -\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)} .$$

4. L'indice 0 fait référence à l'état d'équilibre caractérisé par p_0 et ρ_0.

Pour une particule fluide à l'équilibre, ce rapport s'écrit donc[4] :

$$\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_0}{\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_0} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s_0} . \qquad (1)$$

• L'évolution étant isentropique, on peut encore écrire :

$$s(p_{totale}, \rho_{totale}) = s(p_0, \rho_0), \text{ soit : } s(p_0 + p, \rho_0 + \rho) = s(p_0, \rho_0).$$

À l'ordre 1, cette relation devient :

$$s(p_0,\rho_0) + p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_0 + \rho\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_0 = s(p_0,\rho_0) ,$$

d'où, de nouveau, le rapport :

$$\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_0}{\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_0} = -\frac{\rho}{p} . \qquad (2)$$

• Des relations (1) et (2), on déduit donc l'égalité :

$$\frac{\rho}{p} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s_0} .$$

L'hypothèse d'une **évolution adiabatique** du fluide conduit donc à une première équation de couplage linéaire entre la surpression p et la masse volumique ρ :

$$\rho = \rho_0 \chi_0 p ,$$

où $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s_0}$ est le coefficient de compressibilité isentropique à l'équilibre (en Pa^{-1}).

A.3.2. Équation de conservation de la masse et équation d'Euler

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_{totale}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{totale}\vec{v}_{totale}) = 0 .$$

Copyrighted material

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho_{totale}\left[\frac{\partial \vec{v}_{totale}}{\partial t}+(\vec{v}_{totale}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}_{totale}\right]=-\overrightarrow{\text{grad}}p_{totale}\,.$$

En tenant compte de la décomposition donnée au § A.2, ces équations prennent la forme :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\rho_0+\rho)}{\partial t}+\text{div}((\rho_0+\rho)\vec{v})=0\\ (\rho_0+\rho)\left[\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right]=-\overrightarrow{\text{grad}}(p_0+p)\end{cases}$$

Les termes $\rho\vec{v}$, $\rho\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $\rho_0(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ sont des infiniment petits du deuxième ordre[5]. Le terme $\rho_0(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est un infiniment petit du troisième ordre. On peut les négliger devant les termes du premier ordre.

5. Si une grandeur est un infiniment petit du premier ordre, alors ses dérivées par rapport aux différentes variables seront aussi des infiniment petits du premier ordre. C'est le cas pour $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}$.

On obtient ainsi deux équations de couplage linéarisées entre la masse volumique ρ et la vitesse $\vec{v}$ d'une part, entre la surpression p et la vitesse $\vec{v}$ d'autre part :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0\text{div}(\vec{v})=0\\ \rho_0\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{grad}}p\end{cases}$$

A.3.3. Conclusion

Propriété 1

Dans le cadre de l'approximation acoustique, les **équations de couplage linéaires** entre les champs de surpression p, de masse volumique ρ et de vitesse $\vec{v}$ sont :

$$\begin{cases}\rho=\rho_0\chi_0 p & \text{(hypothèse adiabatique)}\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0\text{div}(\vec{v})=0 & \text{(équation de conservation de la masse)}\\ \rho_0\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\text{grad}}p=\vec{0} & \text{(équation d'Euler)}\end{cases}$$

A.4. Équations de propagation

En éliminant ρ dans l'équation de conservation de la masse et dans l'équation d'Euler grâce à l'hypothèse adiabatique, il vient :

$$\begin{cases}\rho_0\chi_0\dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho_0\text{div}(\vec{v})=0\\ \rho_0\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\text{grad}}p=\vec{0}\end{cases}$$

Sachant que l'on peut permuter les opérations de dérivations spatiale et temporelle, on dérive les deux équations précédentes par rapport au temps et on les combine de manière à isoler les grandeurs p et $\vec{v}$:

$$\begin{cases} \chi_0 \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left(\dfrac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\operatorname{grad}} p\right) = 0 \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\dfrac{1}{\chi_0}\operatorname{div}\vec{v}\right) = \vec{0} \end{cases}$$

• Pour la surpression p, on obtient donc l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\chi_0 \rho_0}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} p\right) = 0 .$$

De même, on obtient une équation de même forme pour la masse volumique $\rho = \rho_0 \chi_0 p$.

Loi 1

Les équations d'évolution des champs de surpression p et de masse volumique ρ sont des **équations de d'Alembert**[6] :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = 0$$

où la vitesse c de l'onde vaut $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$ (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

6. Dans certains problèmes, on trouve parfois l'opérateur d'Alembertien noté $\square$ et défini par :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} .$$

Les équations d'évolution de p et ρ s'écrivent alors :

$$\square p = 0 \text{ et } \square \rho = 0.$$

• Pour la vitesse $\vec{v}$, on obtient une équation de la forme[7] :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{v} = c^2 \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}\right) .$$

La difficulté consiste à calculer le membre de droite de cette équation. Pour cela, reprenons l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} p = \vec{0} ,$$

et appliquons le rotationnel à cette équation. Sachant que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}) = \vec{0}$, il vient :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \vec{0} .$$

En permutant les opérations de dérivation spatiale et temporelle, on obtient :

$$\frac{\partial\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}\right)}{\partial t} = \vec{0} .$$

Le rotationnel de la vitesse ne dépend donc pas du temps. En outre, l'hypothèse $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$ donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$$

ou encore en permutant la moyenne temporelle et la dérivation spatiale :

$$\left\langle \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} \right\rangle = \vec{0} .$$

La valeur moyenne du rotationnel de la vitesse $\vec{v}$ est donc nulle. Puisque $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ est indépendant du temps, il est égal à sa valeur moyenne. Ainsi, à tout instant et en tout point de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} .$$

7. Rappel d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{v}) = \Delta\vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v})$.

Copyrighted material

Pour un fluide dont la vitesse moyenne est nulle ($\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$), l'écoulement est irrotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Loi 2

L'équation d'évolution du champ des vitesses $\vec{v}$ a la forme d'une **équation vectorielle de d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{v} = \vec{0}.$$

B. Ondes sonores planes

B.1. Ondes planes progressives

Les équations précédentes ont toutes la même forme : elles sont linéaires à coefficients constants. Il est ainsi possible, grâce à l'analyse de Fourier, de décomposer la solution générale de ces équations en combinaisons linéaires d'ondes planes progressives :

$$\begin{cases} p(x,y,z,t) = f_p\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + g_p\left(t + \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) \\ \rho(x,y,z,t) = f_\rho\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + g_\rho\left(t + \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) \\ \vec{v}(x,y,z,t) = \vec{f}_v\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + g_v\left(t + \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) \end{cases}$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ précise la direction de propagation.

En se limitant à une onde plane progressive harmonique[8,9] (OPPH) de pulsation ω, les grandeurs précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} p(x,y,z,t) = p_m \cos\left[\omega\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right] \\ \rho(x,y,z,t) = \rho_m \cos\left[\omega\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right] \\ \vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}_m \cos\left[\omega\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)\right] \end{cases}$$

On pose alors le vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$. La linéarité des équations permet également d'adopter la représentation complexe :

$$\begin{cases} \underline{p}(x,y,z,t) = p_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \underline{\rho}(x,y,z,t) = \rho_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \underline{\vec{v}}(x,y,z,t) = \vec{v}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

8. On parle indifféremment d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) ou d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM).

9. Toute onde plane progressive peut se décomposer en une somme d'ondes planes progressives harmoniques. On peut donc limiter l'étude à ces dernières, faciles à « manipuler » mathématiquement.

B.2. Structure des ondes planes progressives

En écrivant la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ en représentation complexe, on obtient[10] :

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{v}} = \vec{0}.$$

10. Dans le cas des OPPH, on peut remplacer de manière formelle en représentation complexe l'opérateur « $\overrightarrow{\text{rot}}$ » par « $-j\vec{k}\wedge$ » et l'opérateur « div » par « $-j\vec{k}\cdot$ ».

Copyrighted material

11. Une onde est longitudinale (resp. transversale) si la déformation a lieu parallèlement (resp. perpendiculairement) à la direction de propagation.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est donc colinéaire au vecteur d'onde $\vec{k}$, c'est-à-dire à la direction de propagation de l'onde. L'onde sonore est donc une onde longitudinale[11].

De manière générale, ce résultat reste vrai pour les ondes planes progressives (OPP) en raison du caractère linéaire de la décomposition de Fourier. On peut donc retenir que **les ondes sonores planes progressives sont longitudinales**.

B.3. Impédance acoustique

• En électrocinétique, on introduit l'impédance électrique pour relier linéairement la différence entre deux états électriques d'un circuit (tension u) et le débit de charges qui en résulte (courant i). En représentation complexe, on a donc :

$$\underline{Z}_{elec} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} .$$

Par analogie, on définit l'impédance acoustique pour relier linéairement la différence entre deux états du fluide parcouru par l'onde sonore (surpression p) et le mouvement de matière qui en résulte (vitesse $\vec{v}$).

Définition 1

En représentation complexe, on définit **l'impédance acoustique** $\underline{Z}$ par le rapport[12] :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}}$$

$\underline{Z}$ impédance acoustique ($kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$)
$\underline{p}$ surpression en pascal (Pa)
$\underline{v}$ vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

12. Les forces de pression (exprimées en Pa·m²) sont homogènes aux forces de pesanteur, c'est-à-dire à une masse par une accélération (exprimée en kg·m·s⁻²). L'unité de Z se déduit donc facilement de l'égalité :

$1\ Pa = 1\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$.

• Pour une OPPH, l'équation d'Euler linéarisée en représentation complexe donne :

$$j\omega\rho_0 \underline{\vec{v}} = j\vec{k}\,\underline{p} .$$

En projetant cette relation sur la direction de propagation $\vec{u}$, on obtient l'impédance :

$$\underline{Z} = \rho_0 c ,$$

dont on remarque qu'elle est réelle et indépendante de la pulsation . Ainsi, les champs de surpression et de vitesse vibrent en phase.

Si on considère maintenant une OPPH se propageant dans le sens opposé, l'impédance vaut :

$$\underline{Z} = -\rho_0 c ,$$

les champs de surpression et de vitesse vibrant alors en opposition de phase.

Pour une OPPH, l'impédance acoustique est **réelle**, indépendante de la pulsation ω et vaut :

$$|\underline{Z}| = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_0}} .$$

L'impédance acoustique est donc d'autant plus élevée que le milieu est dense (ρ_0 élevé) et peu compressible (χ_0 faible). De manière générale, ce résultat reste vrai pour les ondes planes progressives (OPP).

Copyrighted material

B.4. Ordres de grandeur

La vitesse des ondes sonores s'écrit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} \text{ , avec } \chi_0 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{s_0}.$$

13. En première année, la loi de Laplace est donnée dans le cours de thermodynamique sous la forme équivalente :

$PV^{\gamma} = C^{te}$.

Dans le cas d'un gaz parfait, on peut préciser l'expression du coefficient de compressibilité isentropique χ_0. L'équation d'une isentropique est en effet donnée par la loi de Laplace[13] :

$p_{instab} = C^{te} \rho_{instab}^{\gamma}$, où γ désigne le coefficient isentropique.

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression, on obtient :

$$\frac{dp}{p_{instab}} = \gamma \frac{d\rho}{\rho_{instab}} \text{ , ce qui donne : } \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{\rho_{instab}}{\gamma p_{instab}}.$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_{instab} = \frac{\rho_{instab} RT}{M},$$

où T désigne la température du gaz et M sa masse molaire, on trouve finalement :

$$\chi_0 = \frac{M}{\gamma p_0 RT_0}.$$

Dans le cas des gaz parfaits, la vitesse c des ondes sonores a pour expression :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

c vitesse ($m \cdot s^{-1}$)
γ coefficient isentropique (sans unité)
$R = 8{,}31$ S.I. constante des gaz parfaits
T_0 température en kelvin (K)
M masse molaire ($kg \cdot mol^{-1}$)

14. Pour l'air, on a les valeurs numériques :

$M = 29\ g \cdot mol^{-1}$ et $\gamma = 1{,}4$.

• En assimilant l'air à un gaz parfait diatomique, on trouve avec cette formule[14] des valeurs proches des valeurs mesurées expérimentalement. L'ordre de grandeur de la vitesse des ondes sonores dans un gaz est de quelques centaines de mètres par seconde.

Exemples :

– À température ambiante ($T_0 = 298$ K), $c \approx 345\ m \cdot s^{-1}$ et $Z = 403\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

– À $T_0 = 1\,000$ K, $c = 633\ m \cdot s^{-1}$ et $Z = 740\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

• Dans les liquides, la célérité des ondes sonores est plus élevée, de l'ordre de trois fois plus grande que dans les gaz. Par exemple, dans l'eau, à température ambiante, l'expérience donne la vitesse $c = 1450\ m \cdot s^{-1}$ et l'impédance acoustique $Z = 1{,}45 \cdot 10^6\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

• Dans les solides, milieux encore plus denses et quasiment incompressibles, la vitesse des ondes sonores est de l'ordre de quelques milliers de mètres par seconde. La théorie précédente ne permet pas de prévoir de telles valeurs, car elle ne traite que de la propagation des ondes sonores dans les fluides. Il est toutefois possible de justifier la propagation d'ondes sonores dans les solides cristallins en assimilant ces derniers à des chaînes d'atomes (cf. chapitre 1).

Copyrighted material

C. Aspects énergétiques

C.1. Densité de courant d'énergie

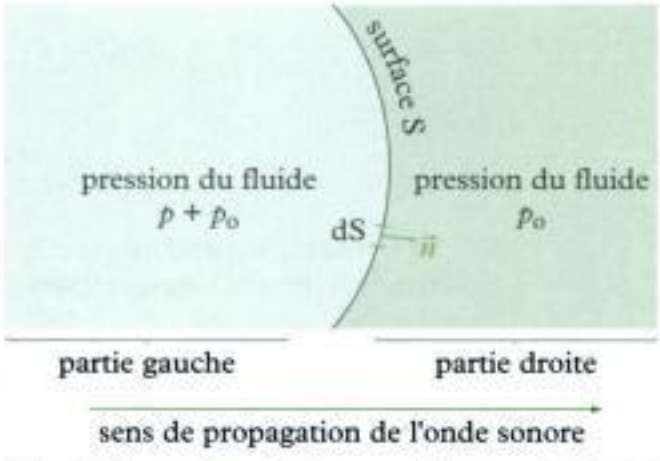


Fig. 1 - Puissance échangée à travers la surface S au cours de la propagation de l'onde sonore.

Considérons une surface fictive S séparant le fluide en deux parties situées à gauche et à droite de cette surface (fig. 1). Une onde sonore se propage dans le fluide et met en mouvement les particules situées à gauche de la surface S, les particules situées à droite de la surface S n'ayant pas encore été mises en mouvement. La pression du fluide à gauche de la surface S est donc $p_0 + p$ et la pression du fluide à droite de la surface S est p_0. La puissance des forces de pression exercées au niveau de la surface S par la partie gauche sur la partie droite est alors[15] :

$$\mathrm{P}_{g\to d} = \iint_S (p_0 + p)\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,,$$

15. On rappelle qu'une puissance est homogène à une force par une vitesse.

où le vecteur unitaire $\vec{n}$ oriente la normale à la surface dans le sens de la force. Calculons la moyenne temporelle de cette puissance. En remarquant que :

$$\left\langle \iint_S p_0\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \right\rangle = p_0 \iint_S \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = 0\,,$$

il vient :

$$\left\langle \mathrm{P}_{g\to d} \right\rangle = \left\langle \iint_S p\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \right\rangle .$$

Seul le terme de surpression contribue à la puissance moyenne des forces de pression. On peut alors définir le vecteur densité de courant d'énergie par :

$$\vec{\Pi} = p\vec{v}\,.$$

16. Lorsqu'on calcule la puissance $\mathrm{P}_{g\to d}$ des forces de pression exercées par la partie gauche sur la partie droite, on calcule la puissance d'une force : on oriente donc le vecteur unitaire $\vec{n}$ dans le sens de la force, c'est-à-dire de la gauche vers la droite. En revanche, la puissance acoustique P désigne la puissance reçue par un système fermé : par convention, on oriente donc l'élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ vers l'extérieur du système, d'où l'apparition d'un signe moins dans l'expression de P.

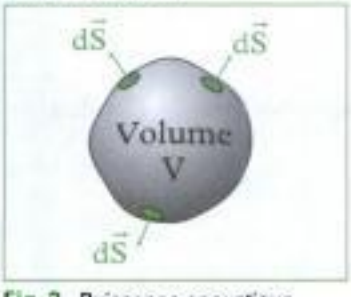


Fig. 2 - Puissance acoustique reçue par une particule fluide.

Propriété 2

Au cours de la propagation d'une onde sonore, la **puissance acoustique** P reçue[16] par une particule fluide de volume V limitée par la surface fermée S est (fig. 2) :

$$\mathrm{P} = -\oiint_S \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

P puissance en watt (W)
$\vec{\Pi} = p\vec{v}$ densité de courant d'énergie ($\mathrm{W\cdot m^{-2}}$)
$\mathrm{d}\vec{S}$ orienté vers l'extérieur

Copyrighted material

C.2. Densité volumique d'énergie

17. Rappel d'analyse vectorielle :
$\overrightarrow{\text{div}}(a\vec{b}) = a\,\text{div}(\vec{b}) + \vec{b}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}a$

Partant de l'expression du vecteur densité d'énergie $\vec{\Pi}$, on a[17] :

$$\text{div}\vec{\Pi} = \text{div}(p\vec{v}) = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}p + p\,\text{div}(\vec{v}) .$$

Les équations de couplage linéarisées du fluide donnent :

$$\text{div}\vec{\Pi} = -\vec{v}\cdot\left(\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) - p\left(\chi_0\frac{\partial p}{\partial t}\right),$$

soit :

$$\text{div}\vec{\Pi} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0\vec{v}^2}{2} + \frac{\chi_0 p^2}{2}\right).$$

• Le terme entre parenthèses est homogène à une énergie par unité de volume. On définit donc la **densité volumique d'énergie** e par :

$$\boxed{e = \frac{\rho_0\vec{v}^2}{2} + \frac{\chi_0 p^2}{2}} .$$

Chacun des termes de e admet une interprétation physique. Le premier terme s'interprète comme une densité volumique d'énergie cinétique de la particule fluide. Le second terme, d'origine purement thermodynamique, s'interprète comme une densité volumique d'énergie potentielle emmagasinée par le fluide et susceptible d'être restituée sous forme d'énergie cinétique. Seule la surpression p intervient dans son expression, la contribution de la pression statique p_0, nulle en moyenne, ne contribuant à aucun transfert énergétique.

L'équation vérifiée par la densité d'énergie volumique e peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}\vec{\Pi} = 0 .$$

Cette équation traduit localement la conservation de l'énergie. Il s'agit d'un bilan local. Une telle relation est très générale en physique[18].

18. Équation locale de conservation de la masse :
$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$.
Équation locale de conservation de la charge :
$\dfrac{\partial\rho_{\text{élec}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$.

• L'énergie sonore E contenue dans une particule fluide de volume V limitée par la surface fermée S vaut donc :

$$\boxed{\mathbf{E} = \iiint_V e\,\mathbf{dV}} .$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\text{dE}}{\text{d}t} = \iiint_V \frac{\partial \text{E}}{\partial t}\,\text{dV},$$

soit en utilisant l'équation du bilan local et le théorème de Green-Ostrogradski:

$$\frac{\text{dE}}{\text{d}t} = -\iiint_V \text{div}\vec{\Pi}\,\text{dV} = -\oiint_S \vec{\Pi}\cdot\text{d}\vec{S} .$$

On retrouve donc l'équation qui traduit globalement la conservation de l'énergie au niveau macroscopique :

$$\frac{\text{dE}}{\text{d}t} = \text{P} .$$

Propriété 3

Au cours de la propagation de l'onde sonore, la **conservation de l'énergie** s'écrit :

– globalement : $\dfrac{\mathbf{dE}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{P}$, avec $\text{E} = \iiint_V e\,\text{dV}$;

– localement : $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{div}\vec{\Pi} = \mathbf{0}$, avec $e = \dfrac{\rho_0\vec{v}^2}{2} + \dfrac{\chi_0 p^2}{2}$.

Copyrighted material

C.3. Énergie d'une OPPH

Pour une OPPH se propageant selon l'axe Oz dans le sens des z positifs, la surpression p et la vitesse $\vec{v}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} p(z,t) = p_m \cos(\omega t - kz) \\ \vec{v}(z,t) = v_m \cos(\omega t - kz)\vec{u}_z \end{cases}$$

avec $p_m = \rho_0 c v_m$ d'après la définition de l'impédance acoustique (cf. § B.2).

– Le vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ a donc pour expression[19] :

$$\vec{\Pi} = p\vec{v} = \rho_0 c v_m^2 \cos^2(\omega t - kz)\vec{u}_z .$$

Sa valeur moyenne temporelle vaut alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \rho_0 c v_m^2 \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle \vec{u}_z = \frac{\rho_0 c v_m^2}{2} \vec{u}_z .$$

– En remarquant que les termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle sont égaux, la densité volumique d'énergie e s'écrit[20] :

$$e = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} + \frac{\chi_0 p^2}{2} = \rho_0 v_m^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

et sa valeur moyenne temporelle vaut :

$$\langle e \rangle = \frac{\rho_0 v_m^2}{2} .$$

– On en déduit donc que :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle e \rangle \vec{u}_z .$$

Cette relation, bien qu'anodine, permet de définir la vitesse de propagation de l'énergie :

$$\boxed{\vec{v}_E = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle e \rangle} = c\vec{u}_z} .$$

Pour une OPPH, la vitesse de propagation de l'énergie est donc égale à la vitesse de l'onde :

$$v_E = c .$$

C.4. Énergie d'une onde stationnaire

Pour une onde stationnaire, les variations spatiales et temporelles sont découplées. Une onde sonore stationnaire prend naissance dans des milieux matériels qui limitent la propagation à un domaine fini de l'espace. Ces limites spatiales imposent des conditions aux limites sur les champs de surpression p et de vitesse $\vec{v}$, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Sans perte de généralité, on peut envisager l'écriture du champ de vitesse $\vec{v}$ sous la forme :

$$\boxed{\vec{v}(z,t) = v_m \cos(\omega t + \phi)\cos(kz)\vec{u}_z} .$$

Cette expression peut également s'écrire comme la combinaison linéaire de deux OPPH, l'une se propageant dans le sens du vecteur $\vec{u}_z$, l'autre se propageant en sens opposé :

$$\vec{v}(z,t) = \underbrace{\frac{v_m}{2}\cos(\omega t - kz + \phi)\vec{u}_z}_{\text{sens des } z \text{ positifs}} + \underbrace{\frac{v_m}{2}\cos(\omega t + kz + \phi)\vec{u}_z}_{\text{sens des } z \text{ négatifs}} .$$

19. Pour calculer $\vec{\Pi}$, on doit absolument utiliser les expressions réelles des champs de surpression et de vitesse. Le vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ se définit en effet par le produit de p par $\vec{v}$, opération non linéaire qui interdit l'utilisation de la représentation complexe.

20. En effet, on a : $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_0}$.

Copyrighted material

Cette décomposition permet de déterminer le champ de surpression p en utilisant l'expression de l'impédance acoustique pour une OPPH. Ainsi, on obtient :

$$p(z,t) = \rho_0 c \frac{v_m}{2} \cos(\omega t - kz + \phi) - \rho_0 c \frac{v_m}{2} \cos(\omega t + kz + \phi),$$

qui prend finalement la forme :

$$p(z,t) = \rho_0 c v_m \sin(\omega t + \phi) \sin(kz).$$

On en déduit le vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = p\vec{v} = \frac{\rho_0 c v_m^2}{4} \sin(2\omega t + 2\phi) \sin(2kz) \vec{u}_z,$$

dont la valeur moyenne temporelle est nulle :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\rho_0 c v_m^2}{4} \sin(2kz) \langle \sin(2\omega t + 2\phi) \rangle \vec{u}_z = 0.$$

Une onde sonore stationnaire **ne transporte pas d'énergie**. Cependant, cela ne signifie pas que l'énergie sonore est nulle[21].

21. Un calcul analogue à celui de $\langle \vec{\Pi} \rangle$ donnerait en effet :

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\rho_0 v_m^2}{4}.$$

C.5. Ordres de grandeurs

L'onde sonore doit son nom au fait qu'elle est détectable par l'oreille. L'oreille est donc un détecteur sensible aux surpressions. Les puissances surfaciques audibles varient d'environ 10^{-12} W·m^{-2}, pour le seuil d'audition, à environ 1 W·m^{-2}, pour le seuil de douleur[22]. Le domaine des fréquences audibles varie de 20 Hz à 20 kHz. Avec de telles valeurs, il est possible de donner l'ordre de grandeur des surpressions et des vitesses associées à une onde sonore.

22. La sensibilité de l'oreille n'est pas linéaire, mais varie comme le logarithme de l'excitation. Pour doubler la sensation acoustique, il faut multiplier par 10 la puissance sonore. C'est pourquoi on utilise une échelle logarithmique pour définir le niveau acoustique L :

$$L = 10 \log \frac{\langle \Pi \rangle}{\Pi_0},$$

$\Pi_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2} étant la puissance surfacique de référence appelée *seuil d'audition*. L'unité de niveau acoustique est le décibel (dB). Pour un être humain, L varie de 0 dB (seuil d'audition) à 120 dB (seuil de douleur).

Ainsi, pour une OPPH de pulsation ω, l'amplitude v_m de la vitesse des particules fluides (en m·s^{-1}), l'amplitude x_m du mouvement des particules fluides (en m) et l'amplitude p_m de la surpression (en Pa) ont respectivement pour expression (cf. § C.4) :

$$v_m = \sqrt{\frac{2\langle \Pi \rangle}{\rho_0 c}}; \; x_m = \frac{v_m}{\omega} \text{ et } p_m = \sqrt{2\rho_0 c \langle \Pi \rangle}.$$

De plus, dans le cas d'un gaz parfait, l'amplitude ρ_m de la masse volumique (en kg·m^{-3}) vérifie la relation (cf. § B.3) :

$$\rho_m = \rho_0 \chi_S p_m = \frac{M p_m}{\gamma R T_0}.$$

En considérant une OPPH de fréquence 1 kHz se propageant dans l'air assimilé à un gaz parfait pris à température ambiante ($\rho_0 = 1{,}2$ kg·m^{-3}, $T_0 = 298$ K), pour une puissance surfacique moyenne égale à 10^{-5} W·m^{-2}, on calcule les valeurs suivantes :

$$v_m = 0{,}2 \text{ cm·s}^{-1} \; ; \; x_m = 3{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ m} \; ; \; p_m = 0{,}1 \text{ Pa} \; ; \; \rho_m = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg·m}^{-3}.$$

L'extrême petitesse de x_m montre combien l'oreille est un détecteur sensible puisque x_m est aussi l'amplitude du mouvement du tympan. Ces valeurs permettent également de valider les hypothèses initialement émises dans le cadre de l'approximation acoustique (cf. § A.2). En effet :

– la surpression p reste très petite devant la pression p_0 de l'ordre de 10^5 Pa : $|p| \ll p_0$;

Copyrighted material

– la masse volumique ρ reste très petite devant ρ_0 : $|\rho| \ll \rho_0$;

– la vitesse v considérée comme «petite», sans autre justification, peut être comparée à la seule vitesse qui caractérise les ondes sonores, à savoir leur vitesse c. Là encore, on a : $v_m \ll c$.

C.6. Retour sur les hypothèses

Les résultats précédents permettent également de vérifier la validité des autres hypothèses émises aux § A.2 et A.3. En considérant une OPPH, il s'introduit naturellement une échelle caractéristique de longueur, par l'intermédiaire de la longueur d'onde[23] λ et une échelle caractéristique de temps, par l'intermédiaire de la période T. La longueur d'onde λ fournit une échelle de distance de variation des champs p, ρ et v ; la période T fournit une échelle de temps de variation de ces mêmes champs. Ainsi, on peut écrire :

$$\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \sim \frac{v_m}{T} \; ; \; \left|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right| \sim \frac{v_m}{T^2} \; ; \; \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \sim \frac{v_m}{\lambda} \; ; \; \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \sim \frac{v_m}{\lambda^2} .$$

• Le terme d'accélération convective peut bien être négligé devant le terme d'accélération locale. En effet, on a :

$$\frac{\left\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right\|}{\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{v_m \times \frac{v_m}{\lambda}}{\frac{v_m}{T}} = v_m \frac{T}{\lambda} = \frac{v_m}{c} \ll 1 .$$

• Le terme de pesanteur peut bien être négligé devant le gradient de surpression. En effet, on a :

$$\frac{\left\|\rho\vec{g}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\text{grad}}p\right\|} \sim \frac{\rho_m g}{\frac{p_m}{\lambda}} = \frac{\rho_0 \chi_0 p_m g c}{p_m f} = \frac{gc}{c^2 f} = \frac{g}{cf} .$$

Dans l'air, la vitesse c du son est de l'ordre de $3\cdot10^2$ m·s^{-1}. Le rapport calculé reste donc faible devant l'unité pour des fréquences f supérieures à 3 Hz, condition satisfaite pour les ondes sonores et ultrasonores.

• L'hypothèse adiabatique consiste à considérer l'évolution du phénomène suffisamment rapide pour pouvoir négliger les échanges thermiques entre les particules fluides. Cela revient à comparer le temps caractéristique de diffusion thermique τ_{therm} au temps caractéristique de variation de la perturbation sonore τ_{son} . En introduisant la taille caractéristique d'une particule fluide (en m) et sa diffusivité thermique a[24] (en m^2·s^{-1}), on a :

$$\tau_{therm} = \frac{d^2}{a} .$$

La taille caractéristique d'une particule fluide est celle de la variation du phénomène ondulatoire, c'est-à-dire sa longueur d'onde λ. Quant à τ_{son}, il est donné par la période temporelle T de l'onde. Dans l'air ($a = 1{,}87\cdot10^{-5}$ m^2·s^{-1}), pour une OPPH de fréquence 1 kHz, le rapport des temps caractéristiques a pour ordre de grandeur :

$$\frac{\tau_{therm}}{\tau_{son}} = \frac{\lambda^2}{aT} = \frac{c^2}{af} \sim 6\cdot10^6 ,$$

ce qui justifie pleinement l'hypothèse adiabatique[25].

23. On rappelle que :
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT .$$

24. La diffusivité thermique a dépend de la conductivité thermique :
$$\frac{\lambda_m}{\rho c_m} ,$$
où c_m est la capacité thermique massique du corps.

25. Ce résultat reste vrai pour la plupart des fluides et solides sont les diffusivités thermiques sont de l'ordre de 10^{-4} m^2·s^{-1}.

Copyrighted material

D. Réflexion et transmission

D.1. Conditions aux limites

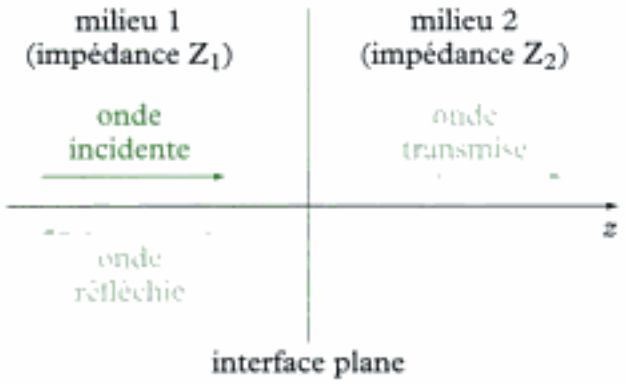


Fig. 3 - Réflexion et transmission d'une onde sonore.

Considérons une interface plane infinie entre deux fluides située en $z = 0$. Une onde progressive plane émise dans la région $z < 0$ se propage dans le sens des z croissants vers l'interface. Elle tombe sur l'interface sous incidence normale et elle y est en partie réfléchie et en partie transmise (fig. 3).

On note $\vec{v}_i, p_i$ les champs de vitesse et de surpression associés à l'onde incidente, $\vec{v}_r, p_r$ ceux associés à l'onde réfléchie et enfin $\vec{v}_t, p_t$ ceux associés à l'onde transmise[26].

26. L'onde réfléchie se propage dans le sens des $z < 0$, l'onde transmise dans le sens des $z > 0$.

• Quand l'onde tombe sur l'interface, la composante de la vitesse normale à la surface de séparation entre les milieux est égale à gauche et à droite de celle-ci car les déplacements des fluides y sont les mêmes.

> Sous incidence normale, il y a continuité des champs de vitesse à l'interface :
> $$\vec{v}_i(z=0,t) + \vec{v}_r(z=0,t) = \vec{v}_t(z=0,t).$$

• Dans l'approximation acoustique, l'interface peut être considérée comme fixe, ses déplacements restant faibles devant la longueur d'onde. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un élément de surface dS de l'interface (de masse nulle), il vient après projection sur l'axe des z :

$$(p_0 + p_i + p_r)\mathrm{d}S - (p_0 + p_t)\mathrm{d}S = 0.$$

Ainsi, il n'existe aucune différence entre les pressions exercées par les fluides de part et d'autre de la surface.

> Sous incidence normale, il y a continuité des champs de surpression à l'interface :
> $$p_i(z=0,t) + p_r(z=0,t) = p_t(z=0,t).$$

Pour une OPPH, les différents champs considérés peuvent s'écrire en représentation complexe :

$$\left|\begin{array}{l}\underline{\vec{v}}_i = \underline{v}_{im} e^{j(\omega t - k_1 z)}\vec{u}_z \\ \underline{p}_i = \underline{p}_{im} e^{j(\omega t - k_1 z)}\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\underline{\vec{v}}_r = \underline{v}_{rm} e^{j(\omega t + k_1 z)}\vec{u}_z \\ \underline{p}_r = \underline{p}_{rm} e^{j(\omega t + k_1 z)}\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\underline{\vec{v}}_t = \underline{v}_{tm} e^{j(\omega t - k_2 z)}\vec{u}_z \\ \underline{p}_t = \underline{p}_{tm} e^{j(\omega t - k_2 z)}\end{array}\right.$$

Copyrighted material

Propriété 5

Pour une OPPH, les **conditions aux limites à l'interface** ($z = 0$) se traduisent par deux relations entre les amplitudes des champs de vitesse et de surpression :

$$\begin{cases} \underline{v}_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm} \\ \underline{p}_{im} + \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm} \end{cases}$$

D.2. Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

• Pour une OPPH, les relations précédentes permettent de caractériser l'interface par son coefficient de réflexion r_v et son coefficient de transmission t_v en amplitude des vitesses définis en $z = 0$ par :

$$r_v = \frac{\underline{v}_r}{\underline{v}_i} = \frac{\underline{v}_{rm}}{\underline{v}_{im}} \text{ et } t_v = \frac{\underline{v}_t}{\underline{v}_i} = \frac{\underline{v}_{tm}}{\underline{v}_{im}}.$$

En introduisant les impédances acoustiques Z_1 et Z_2 des deux fluides, les conditions aux limites s'écrivent[27] :

$$\begin{cases} \underline{v}_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm} \\ Z_1\underline{v}_{im} - Z_1\underline{v}_{rm} = Z_2\underline{v}_{tm} \end{cases}$$

d'où l'on déduit le système :

$$\begin{cases} 1 + r_v = t_v \\ Z_1(1 - r_v) = Z_2 t_v \end{cases}$$

27. Attention à bien introduire un signe « moins » pour l'onde réfléchie.

Propriété 6

Pour une OPPH, les coefficients de réflexion r_v et de transmission t_v **en amplitude des vitesses**, sous incidence normale, sont à l'interface :

$$r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

où Z_1 et Z_2 sont les impédances acoustiques des deux fluides.

On remarque tout d'abord que ces coefficients sont réels puisque les impédances Z_1 et Z_2 le sont. Le coefficient de transmission t_v est toujours positif : les ondes incidente et transmise vibrent toujours en phase. Le coefficient de réflexion r_v peut être négatif : les ondes incidente et réfléchie vibrent soit en phase, soit en opposition de phase.

En outre, la réflexion est d'autant plus faible et la transmission d'autant plus élevée que les impédances des milieux sont proches. Ainsi, si $Z_2 = Z_1$, on a $r_v = 0$ et $t_v = 1$: l'onde est totalement transmise, ce qui constitue une situation dite **d'adaptation d'impédances**.

A contrario, si $Z_2 = \infty$ (cas d'un milieu 2 de compressibilité nulle), $r_v = -1$ et $t_v = 0$: l'onde est totalement réfléchie. De même, si $Z_2 = 0$ (cas d'un milieu 2 identique au vide), il ne peut pas y avoir de propagation dans le milieu 2 : l'onde est donc totalement réfléchie.

• Il est également possible de définir un coefficient de réflexion r_p et un coefficient de transmission t_p en amplitude des surpressions par :

$$r_p = \frac{\underline{p}_r}{\underline{p}_i} \text{ et } t_p = \frac{\underline{p}_t}{\underline{p}_i}.$$

28. Les calculs sont identiques à ceux de r_v et t_v, les rôles de Z_1 et Z_2 étant inversés.

Pour une OPPH, les coefficients de réflexion r_p et de transmission t_p **en amplitude des surpressions**, sous incidence normale, sont à l'interface[28] :

$$r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} .$$

D.3. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

Il est également possible de caractériser l'interface par des coefficients de réflexion R et de transmission T des puissances sonores qui s'expriment en fonction des puissances surfaciques moyennes incidente P_i, réfléchie P_r et transmise P_t :

$$R = \frac{P_r}{P_i} \text{ et } T = \frac{P_t}{P_i} .$$

29. En effet, on a (cf. § C.3) :

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\rho_0 c}{2} v_m^2 ,$$

avec $Z = \rho_0 c$.

La puissance surfacique moyenne échangée par l'onde est égale à la valeur moyenne temporelle $\langle \Pi \rangle$ du vecteur densité de courant d'énergie. Pour une OPPH, on sait que[29] :

$$P_i = \frac{Z_1}{2}\left|\underline{v}_{inc}\right|^2 , \; P_r = \frac{Z_1}{2}\left|\underline{v}_{ref}\right|^2 \text{ et } P_t = \frac{Z_2}{2}\left|\underline{v}_{tra}\right|^2$$

avec $\underline{v}_{ref} = r_v \underline{v}_{inc}$ et $\underline{v}_{tra} = t_v \underline{v}_{inc}$.

Pour une OPPH, les coefficients de réflexion R et de transmission T **des puissances sonores**, sous incidence normale, s'écrivent :

$$\begin{cases} R = r_v^2 = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = t_v^2 \dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}$$

Ces coefficients ne sont pas indépendants l'un de l'autre puisque : R + T = 1.

30. En effet, bien que l'adaptation d'impédances ne puisse être satisfaite, un gel déposé sur le corps du patient assure une meilleure transmission des ondes ultrasonores entre l'émetteur et le corps.

31. L'isolation phonique peut encore être améliorée avec des structures en couches alternant des milieux denses (bois, métaux) et des milieux peu denses (air, liège, mousses).

La dernière relation ne fait que traduire la conservation de l'énergie en l'absence de phénomènes dissipatifs : l'énergie incidente est pour une part réfléchie, pour l'autre part transmise.

Comme pour les coefficients en amplitude, une onde sonore est d'autant mieux transmise d'un point de vue énergétique que les impédances des fluides sont proches. Cette propriété est exploitée, par exemple, en échographie médicale[30].

À l'opposé, il peut également être intéressant de limiter la transmission d'un son, par exemple pour mettre en place un système d'isolation phonique. On travaille alors avec des milieux d'impédances très différentes : un fluide gazeux (Z de l'ordre de 10^2 kg·m^{-2}·s^{-1}) et un solide (Z de l'ordre de 10^6 kg·m^{-2}·s^{-1}), l'onde sonore incidente prenant naissance dans le gaz. En tombant sur le solide, l'onde est presque totalement réfléchie[31].

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Équations d'onde

• Une onde sonore en propagation dans un fluide peut être décrite en chaque point M(x, y, z) et à chaque instant t par les champs de pression (Pa), de masse volumique (kg · m^{-3}) et de vitesse (m · s^{-1}) :

$$\begin{cases} p_{\text{totale}}(x,y,z,t) = p_0 + p(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle p \rangle = 0 \\ \rho_{\text{totale}}(x,y,z,t) = \rho_0 + \rho(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle \rho \rangle = 0 \\ \vec{v}_{\text{totale}}(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z,t) & \text{avec} \quad \langle \vec{v} \rangle = \vec{0} \end{cases}$$

Les grandeurs indicées « 0 » sont les grandeurs au repos, supposées uniformes. p est la **surpression** (ou pression acoustique) (en Pa).

• **Approximation acoustique :** dans la description de l'onde sonore, on se limite à des **calculs à l'ordre 1**, ce qui permet d'écrire des équations linéaires. Dans le cadre de cette approximation, ρ et p sont donc des infiniment petits du premier ordre :

$$|p| \ll p_0 \text{ et } |\rho| \ll \rho_0 .$$

De même, on suppose que $\vec{v}$ est un infiniment petit du premier ordre.

• Dans le cadre de l'approximation acoustique, les **équations de couplage linéaires** entre les champs de surpression p, de masse volumique ρ et de vitesse $\vec{v}$ sont :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \chi_0 p & \text{(hypothèse adiabatique)} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 & \text{(équation de conservation de la masse)} \\ \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad} p} = \vec{0} & \text{(équation d'Euler)} \end{cases}$$

Dans la première équation, χ_0 est le coefficient de compressibilité isentropique à l'équilibre (Pa^{-1}).

• Les équations d'évolution des champs de surpression p et de masse volumique ρ sont des équations de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = 0 \text{ , avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} \text{ (en m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

De même, l'équation d'évolution du champ des vitesses a la forme d'une équation vectorielle de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{v} = \vec{0} .$$

✓ Ondes sonores planes

• En représentation complexe, les champs associés à une OPPH de pulsation ω en propagation selon la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ s'écrivent :

Copyrighted material

$$\begin{cases} \underline{p}(x,y,z,t) = p_m e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \\ \underline{\rho}(x,y,z,t) = \rho_m e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \\ \underline{\vec{v}}(x,y,z,t) = \vec{v}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \end{cases}, \text{ avec } \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u} \text{ vecteur d'onde.}$$

- Les ondes sonores planes progressives sont **longitudinales**.
- En représentation complexe, on définit **l'impédance acoustique** $\underline{Z}$ par le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}}$$

$\underline{Z}$ impédance acoustique ($kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$)
$\underline{p}$ surpression en pascal (Pa)
$\underline{v}$ vitesse ($m \cdot s^{-1}$)

Pour une OPPH, l'impédance acoustique est réelle, indépendante de la pulsation ω et vaut :

$$|Z| = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_0}}$$

(valeur positive dans le sens des z croissants, valeur négative dans le sens des z décroissants).

✓ Aspects énergétiques

- Au cours de la propagation d'une onde sonore, la **puissance acoustique P** reçue par une particule fluide de volume V limitée par la surface fermée S est :

$$\mathbf{P} = -\iint_S \vec{\Pi} \cdot \mathbf{d\vec{S}}$$

P puissance en watt (W)
$\vec{\Pi} = p\vec{v}$ densité de courant d'énergie ($W \cdot m^{-2}$)
$d\vec{S}$ orienté vers l'extérieur

- Au cours de la propagation de l'onde sonore, la conservation de l'énergie s'écrit :

– globalement : $\frac{dE}{dt} = P$, avec $E = \iiint_V e dV$;

– localement : $\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}\vec{\Pi} = 0$, avec $e = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} + \frac{\chi_0 p^2}{2}$.

Le premier terme de la **densité d'énergie volumique** e s'interprète comme une densité volumique d'énergie cinétique de la particule fluide, le second terme comme une densité volumique d'énergie potentielle emmagasinée par le fluide.

- Pour une OPPH, la vitesse de propagation de l'énergie est **égale** à la vitesse de propagation c de l'onde. En revanche, une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.

✓ Réflexion et transmission

- Une onde sonore progressive plane en propagation dans le sens des z croissants tombe sur une interface plane infinie située en $z = 0$ entre deux fluides. L'onde est en partie réfléchie et en partie transmise. Sous incidence normale, à l'interface :

– il y a **continuité des champs de vitesse** :

$$\vec{v}_i(z=0,t) + \vec{v}_r(z=0,t) = \vec{v}_t(z=0,t) ;$$

– il y a **continuité des champs de surpression** :

$$p_i(z=0,t) + p_r(z=0,t) = p_t(z=0,t) .$$

Copyrighted material

• Pour une OPPH, les conditions aux limites à l'interface ($z = 0$) se traduisent en représentation complexe par deux relations entre les amplitudes des champs de vitesse et de surpression :

$$\begin{cases} \underline{v}_{in} + \underline{v}_{re} = \underline{v}_{tr} \\ \underline{p}_{in} + \underline{p}_{re} = \underline{p}_{tr} \end{cases}$$

Les coefficients de réflexion r_v et de transmission t_v en amplitude des vitesses, les coefficients de réflexion r_p et de transmission t_p en amplitude des surpressions, sont à l'interface :

$$r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

De même, les coefficients de réflexion R et de transmission T des puissances sonores sont :

$$R = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ et } T = t_v^2 \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \text{ avec : } R + T = 1.$$

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment mettre en équation un problème de propagation du son ?

L'une des difficultés de ce problème réside dans la manipulation d'un grand nombre d'équations.

→ Savoir faire

❶ Écrire l'équation d'Euler associée à un bilan mécanique. Il faut prendre garde à ne rien oublier :

$$\rho_{tot}\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p_{tot} + \vec{f},$$

où $\vec{f}$ désigne les forces volumiques autres que les forces de pression.

❷ Écrire l'équation de conservation de la masse.

❸ Écrire une troisième équation associée à un bilan thermodynamique. Dans le cas d'un fluide en écoulement isentropique, on utilise le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_{tot}}\left(\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial p_{tot}}\right)_s.$$

❹ Linéariser les équations en posant :

$$\begin{cases} \rho_{tot} = \rho_0 + \rho, \text{ avec } |\rho| \ll \rho_0 \\ p_{tot} = p_0 + p, \text{ avec } |p| \ll p_0 \end{cases}$$

et en ne conservant que les termes du premier ordre.

❺ Coupler ces équations pour obtenir l'équation d'onde associée soit à la surpression p, soit à la masse volumique ρ, soit à la vitesse $\vec{v}$.

Copyright Material

→ Application

L'air est assimilé à un gaz parfait sans viscosité qui évolue de manière isentropique en présence d'une onde sonore. Écrire les équations linéarisées en négligeant l'influence de la pesanteur. En déduire les équations d'onde pour p, ρ et $\vec{v}$.

Solution

Les trois équations fondamentales sont :

❶ l'équation d'Euler :

$$\rho_{tot}\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p_{tot} \ ;$$

❷ l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} + \text{div}(\rho_{tot}\vec{v}) = 0 \ ;$$

❸ l'équation associée à l'évolution isentropique du fluide :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_{tot}}\left(\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial p_{tot}}\right)_s .$$

❹ En écrivant :

$$\rho_{tot} = \rho_0 + \rho, \text{ avec } |\rho| \ll \rho_0$$

et

$$p_{tot} = p_0 + p, \text{ avec } |p| \ll p_0$$

on obtient les équations linéarisées :

$$\begin{cases} (1) \quad \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p \\ (2) \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \,\text{div}\,\vec{v} = 0 \\ (3) \quad \rho = \rho_0 \chi_s p \end{cases}$$

❺ On a alors : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \dfrac{\partial p}{\partial t}$, ce qui donne :

$$\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}\,\vec{v} = 0.$$

Puis : $\rho_0 \text{div}\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\Delta p$, ce qui donne :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{v}) = -\Delta p, \text{ soit : } \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p.$$

D'où finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0} \text{ , avec } \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}.$$

Copyrighted material

On a également :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = 0$$

L'écoulement étant irrotationnel, on déduit aussi :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{v} = 0 \ .$$

Méthode n°2

Comment calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface entre deux milieux ?

Une OPPH acoustique tombe sous incidence normale sur la surface de séparation entre deux milieux.

➜ Savoir faire

❶ En représentation complexe, écrire l'onde totale dans le milieu 1 comme la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{v}}_1 = \underline{\vec{v}}_i + \underline{\vec{v}}_r \quad \text{et} \quad \underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$$

(l'onde réfléchie se propageant dans le sens des z décroissants, l'exponentielle complexe s'écrit $e^{j(\omega t + kz)}$).

❷ Écrire les conditions aux limites à l'interface ($z = 0$) :

– continuité de la vitesse ;

– continuité de la supression ;

❸ Introduire les impédances acoustiques Z_1 et Z_2 des deux milieux. Pour l'onde réfléchie, on a :

$$\underline{p}_r = - Z_1 \, \underline{v}_r$$

❹ Introduire les coefficients de réflexion et de transmission cherchés. Résoudre le système de deux équation à deux inconnues correspondant.

➜ Application

Deux milieux caractérisés par $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$ sont séparés par une interface plane. Une OPPH se propage du milieu 1 vers le milieu 2. Elle arrive sous incidence normale sur la surface de séparation des deux milieux. En représentation complexe, on note :

$$\underline{\vec{v}}_i (z, t) = v_{im} \, e^{j(\omega t - k_1 z)} \, \vec{u}_z \text{, avec } k_1 = \frac{\omega}{c_1} .$$

On suppose que les ondes réfléchies et transmises sont aussi des OPPH de même pulsation ω, en propagation selon la direction $\vec{u}_z$.

Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses r_v et t_v.

Copyright

Solution

❶ L'onde dans le milieu 1 est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{v}}_1(z,t) = \underline{v}_{im}\, e^{j(\omega t - k_1 z)}\, \vec{u}_z + \underline{v}_{rm}\, e^{j(\omega t + k_1 z)}\, \vec{u}_z$$

De même : $\underline{\vec{v}}_2(z,t) = \underline{v}_{tm}\, e^{j(\omega t - k_2 z)}\, \vec{u}_z$, avec $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$.

⚠ L'amplitude de l'onde réfléchie est *a priori* complexe, car elle peut contenir un déphasage (de même pour la surpression).

❷ À l'interface ($z = 0$), les continuités de la vitesse et de la surpression s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\vec{v}}_1(0,t) = \underline{\vec{v}}_2(0,t) \Rightarrow v_{im} + \underline{v}_{rm} = \underline{v}_{tm} & \textbf{(1)} \\ \underline{p}_1(0,t) = \underline{p}_2(0,t) \Rightarrow \underline{p}_i(0,t) + \underline{p}_r(0,t) = \underline{p}_t(0,t) & \textbf{(2)} \end{cases}$$

❸ En introduisant les impédances acoustiques Z_1 et Z_2 des deux milieux, l'équation (2) devient :

$$Z_1\, \underline{v}_i(0,t) - Z_1\, \underline{v}_r(0,t) = Z_2\, \underline{v}_t(0,t)$$

soit : $Z_1 v_{im} - Z_1\, \underline{v}_{rm} = Z_2\, \underline{v}_{tm}$. **(2')**

❹ En introduisant les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, il vient :

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow 1 + r_v = t_v \\ (2') \Rightarrow Z_1 (1 - r_v) = Z_2 t_v \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne :

$$\boxed{r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}.$$

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Ondes acoustiques planes

Un fluide parfait non visqueux est initialement au repos. La pression et la masse volumique γ sont uniformes égales à p_0 et r_0, et la vitesse des particules de fluide est nulle. Une onde sonore se propage dans ce fluide dans la direction Oz, dans le sens des z croissants, et met les particules de fluide en mouvement. Localement, la masse volumique devient $r_0 + r$, la surpression $p(z,t)$ et la vitesse d'une particule fluide $\vec{v}(z,t)$.

La perturbation est à l'origine de vibrations longitudinales suffisamment faibles pour se placer dans le cadre de l'approximation acoustique. On introduit l'élongation $\xi(z,t)$ d'une particule de fluide par rapport à sa position d'équilibre repérée par z. La vitesse acoustique, suivant le vecteur unitaire de l'axe Oz, s'écrit alors :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} .$$

On note χ_0 le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé constant.

1) On considère une tranche de fluide d'épaisseur δz au repos, de section S, de volume $\delta V_0 = S\delta z$. Mise en mouvement, son volume devient $\delta V(t)$ à l'instant t.

a. Exprimer δV en fonction de δV_0 et de $\frac{\partial \xi}{\partial z}$.

b. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à cette tranche de fluide, montrer que l'élongation ξ est solution d'une équation de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation c du son dans le fluide ?

c. Donner la solution générale de l'équation précédemment obtenue. En déduire l'expression de la vitesse $v(z,t)$. En déduire celle de la surpression $p(z,t)$ en introduisant l'impédance acoustique caractéristique $Z_c = \rho_0 c$ du milieu.

2) En l'absence de transferts thermiques et en présence de forces extérieures de pression seulement, le premier principe de la thermodynamique s'écrit localement sous la forme :

$$\rho_{locale} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u + \frac{v^2}{2}\right) = -\mathrm{div}(p_{locale}\vec{v})$$

où u désigne l'énergie interne massique du fluide.

a. En utilisant l'équation d'Euler, simplifier la relation précédente.

b. Dans l'approximation acoustique, montrer que l'énergie interne volumique $\rho_0 u$ peut s'écrire comme la somme de deux termes et qu'il est possible de définir une énergie potentielle volumique acoustique par :

$$e_p = \frac{1}{2}\chi_0 p^2 .$$

c. En déduire que l'énergie volumique moyenne totale s'écrit :

$$e = \left\langle \rho_0 v^2 \right\rangle$$

pour une onde acoustique plane progressive. En déduire l'intensité acoustique I d'une onde plane progressive, définie comme l'énergie moyenne transmise par seconde par unité de surface du front d'onde.

Niveau 2

Ex. 2 Ondes acoustiques sphériques

Une onde sonore émise depuis une source pratiquement ponctuelle se propage dans toutes les directions de l'espace. L'onde émise n'a pas la structure d'une onde plane, mais celle d'une onde sphérique. Pour rendre compte des propriétés de cette onde, on doit étudier la propagation du son dans un espace à trois dimensions. Dans le cas où le milieu dans lequel se propage l'onde est isotrope, l'équation d'onde est encore une équation de d'Alembert comme nous allons le voir ci-dessous.

1) On rappelle que le laplacien en coordonnées sphériques, pour un problème présentant la symétrie sphérique, peut s'écrire :

$$\Delta p = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

a. Montrer que dans les conditions précisées plus haut, l'équation de d'Alembert pour une onde sphérique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0 .$$

b. En déduire l'expression de la solution générale et l'interpréter.

2) On adopte une représentation complexe pour la surpression p et le champ de vitesse $\vec{v}$.

a. Justifier une expression de la forme :

$$\underline{p} = \frac{\mathrm{A}}{r}\exp\left[j(\omega t - kr + \varphi)\right] .$$

b. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ à grande distance. Préciser cette dernière hypothèse.

c. Montrer que l'intensité acoustique I de l'onde peut s'écrire :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\underline{p}\cdot\underline{v}^*] .$$

3) La source sonore est une petite sphère imperméable de rayon moyen r_0 qui effectue des oscillations har-

Copyrighted material

moniques radiales d'amplitude r_m, à la pulsation ω. On suppose que $r_m \ll r_0$ et que $r_0 \ll \lambda$ (longueur d'onde acoustique).

a. Avec les hypothèses précédentes, trouver l'expression de A en fonction de r_m.

b. En déduire l'expression de la puissance acoustique moyenne qui traverse une sphère de rayon r.

c. À l'aide de ce dernier résultat, expliquer pourquoi on utilise des hauts-parleurs de « petite taille » pour émettre les sons aigus et des hauts-parleurs de « grande taille » pour émettre les sons graves.

Ex. 3 Adaptation d'impédances

1) Deux milieux d'impédances acoustiques Z_1 et Z_2 sont séparés par un plan orthogonal à la direction Oz. L'origine des axes est choisie dans ce plan, les axes Ox et Oy étant contenus dans ce plan. Une onde sonore plane progressive se propage suivant la direction Oz du milieu 1 vers le milieu 2, dans le sens des z croissants. Elle tombe sous incidence normale sur le plan de séparation. Une onde réfléchie et une onde transmise prennent naissance au niveau du plan. On suppose que ces ondes sont planes, de plan d'onde orthogonal à l'axe Oz.

a. Rappeler les conditions de continuité des surpressions et des vitesses sur la surface de séparation.

b. Définir les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux surpressions. Les exprimer en fonction de Z_1 et Z_2.

c. Justifier rapidement le fait que l'intensité acoustique s'écrive, pour une onde plane, sous la forme :

$$I = \frac{< p^2 >}{Z} .$$

d. Définir les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs aux intensités. Vérifier la conservation de l'énergie.

e. Le milieu 1 est de l'air sec à 290 K, de masse volumique $\rho_{air} = 1{,}22\ kg \cdot m^{-3}$, dans lequel la vitesse du son vaut $v_{air} = 341\ m \cdot s^{-1}$. Le milieu 2 est de l'eau de masse volumique $\rho_{eau} = 10^3\ kg \cdot m^{-3}$, dans lequel la vitesse du son vaut $v_{eau} = 1\ 400\ m \cdot s^{-1}$.

Calculer $R_{air-eau}$ et $T_{air-eau}$.

f. Pourquoi dit-on que les impédances de l'air et de l'eau ne sont pas adaptées ?

2) Une onde sonore plane se propage à présent de l'eau (milieu 1) vers un détecteur (milieu 3) après avoir traversé une mince couche d'air (milieu 2). On note I_1 l'intensité du son qui se propage dans le milieu 1. Lorsque cette onde tombe (sous incidence normale) sur l'interface eau-air, elle est en partie réfléchie et en partie transmise. On note R_1 et T_1 les coefficients de réflexion et de transmission en intensité. De la même façon, à l'interface air-détecteur, on définit les coefficients R_2 et T_2. On suppose que les milieux sont non absorbants.

a. Calculer les valeurs de R_1, T_1, R_2 et T_2.

b. En admettant que l'on puisse négliger les phénomènes d'interférences entre les ondes, montrer qu'avec les valeurs précédentes des coefficients, l'intensité sonore I_3 reçue par le détecteur peut s'écrire :

$$I_3 = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2} I_1 .$$

c. Compte tenu des valeurs des impédances acoustiques des milieux, montrer que :

$$I_3 \approx \frac{4 Z_{air}}{Z_{eau} + Z_{détecteur}} I_1 .$$

On donne : $Z_{détecteur} = 3 \cdot 10^6\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

d. La couche d'air est remplacée par une couche de glycérine pour laquelle $Z_{gly} = 2{,}4 \cdot 10^6\ kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$. Que deviennent les résultats précédents ?

e. Que pensez-vous de l'utilisation d'un gel à base de glycérine lors d'une échographie ?

Ex. 4 Impédance ramenée

Un tuyau sonore de section constante, d'axe Oz, contenant de l'air, est fermé à l'une de ses extrémités, située en $z = L$, par un matériau d'impédance acoustique Z_m. Une OPPH incidente se propage dans le tuyau dans le sens des z croissants. Elle donne naissance à une onde réfléchie. En représentation complexe, on note $\underline{p}_i$ la pression acoustique de l'onde incidente et $\underline{r}$ le coefficient de réflexion en surpression en $z = L$.

1) Exprimer $\underline{r}$ en fonction de Z_m et de l'impédance de l'air Z_a.

2) Donner les expressions de $\underline{p}_i$, $\underline{v}_i$, pression acoustique et vitesse relatives à l'onde incidente, puis celles de $\underline{p}_r$, $\underline{v}_r$, pression acoustique et vitesse relatives à l'onde réfléchie.

3) On définit l'impédance ramenée par :

$$\underline{Z}(z) = \frac{\underline{p}(z)}{\underline{v}(z)} .$$

Trouver l'expression de $\underline{Z}(z)$.

4) Discuter les cas suivants :

$$Z_m = \infty ,\ Z_m = 0 \text{ et } Z_m = Z_a .$$

Ex. 5 Notes émises par un instrument à vent

1) Un tuyau sonore de révolution d'axe Oz est composé de deux parties cylindriques de sections respectives S_1 et S_2, raccordées par une discontinuité brutale de section située en $z = L$. On désigne par ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et par c la vitesse de propagation du son. Soit p_i l'amplitude de la surpression créée par une onde se propageant le long du tuyau dans le sens des z croissants. La discontinuité engendre deux ondes supposées planes : une onde réfléchie et une onde transmise. En outre, l'existence d'une discontinuité de diamètre conduit à généraliser l'expression de

Copyrighted material

l'impédance acoustique en prenant en compte le débit volumique plutôt que la vitesse des particules de fluide :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{S\underline{v}} .$$

a. Déterminer l'expression du coefficient de réflexion r en surpression en fonction du rapport :

$$x = \frac{S_2}{S_1} .$$

En déduire le coefficient de réflexion R relatif aux puissances acoustiques en fonction de x.

b. Tracer l'allure de la fonction $R(x)$ et préciser la signification physique de son minimum.

c. À quelles conditions physiques correspondent les limites $x \to 0$ et $x \to \infty$ à S_1 fixé ? En déduire les conditions d'extrémité en termes de pression et de vitesse dans les deux cas.

2) Un instrument à vent peut être considéré comme un tuyau sonore de longueur L vérifiant à ses extrémités l'une ou l'autre des deux conditions aux limites : tuyau ouvert ou tuyau fermé. Il se comporte donc pour certaines fréquences comme un résonateur siège d'un système d'ondes stationnaires de longueur d'onde λ. Les fréquences associées constituent les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable d'émettre. Un jeu de conditions aux limites sera dit pair si les conditions aux deux extrémités sont de même nature (ouvert-ouvert ou fermé-fermé) et impair si les conditions aux deux extrémités sont de nature différente (ouvert-fermé).

a. Montrer par un raisonnement physique simple que la note fondamentale, note la plus basse émise par l'instrument, ne dépend que de la longueur L du tuyau, de la vitesse de propagation du son c et de la parité. Donner l'expression de la fréquence correspondante.

b. Pour les applications numériques suivantes, la vitesse du son dans l'air sera prise égale à $340\ m \cdot s^{-1}$.

• La flûte traversière est un instrument considéré comme ouvert à ses deux extrémités. Déterminer la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note *mi* de fréquence 330 Hz.

• L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. À longueur égale, la clarinette joue-t-elle plus haut ou plus bas que la flûte ?

• Le plus long tuyau d'un grand orgue mesure 10,6 m et émet une note fondamentale à 16 Hz. Déterminer la parité de son jeu de conditions aux limites.

Niveau 3

Ex. 6 Pavillon exponentiel

Les instruments à vent comme les cuivres ou les portevoix sont constitués d'un tuyau qui s'évase, appelé pavillon acoustique. Ce dernier réalise l'adaptation d'impédance entre l'intérieur de l'instrument et l'air libre : l'impédance passe d'une valeur élevée à l'intérieur de l'instrument à une valeur faible dans l'air libre. Le modèle simple suivant se propose de justifier la forme exponentielle du pavillon acoustique. Ce modèle reste cependant trop simple pour décrire correctement le phénomène. Il doit en particulier être complété pour prendre en compte l'existence d'une fréquence de coupure en dessous de laquelle aucune propagation n'est possible.

En raison de la variation du diamètre du tube, on généralise l'expression de l'impédance acoustique sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{S\underline{v}} ,$$

S étant la section du tube de diamètre D.

1) On considère un tuyau de longueur totale L composé de deux parties cylindriques de sections respectives s et $S > s$, raccordés par une discontinuité brutale de section. Rappeler l'expression du coefficient de transmission T relatif aux puissances acoustiques.

2) On considère maintenant un tuyau de longueur totale L composé de trois cylindres de même longueur, de sections respectives $s < S_1 < S$. Exprimer le coefficient de transmission global T. Montrer qu'il est maximal pour $S_1 = \sqrt{sS}$ et donner l'expression de T_{max}.

3) Un tuyau de longueur totale L est à présent composé de N cylindres de même longueur, de sections S_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$, avec $S_0 = s$ et $S_{N-1} = S$.

a. Établir la loi à donner aux sections S_k pour que le coefficient de transmission global soit maximal.

b. En déduire l'expression de T_{max} en fonction de

$$m = \left(\frac{S}{s}\right)^{\frac{1}{N-1}} .$$

c. On veut passer à la limite continue $N \to \infty$. On pose $\varepsilon = m - 1$. Montrer que :

$$\varepsilon = \frac{1}{N-1}\left(\frac{S}{s} - 1\right)$$

et que :

$$T_{max} = 1 - (N-1)\varepsilon^2 .$$

d. En déduire que T_{max} tend vers 1 quand $N \to \infty$, montrant ainsi que l'adaptation d'impédance est réalisée.

e. En notant $x = k\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{L}{N}$, montrer que $S_k = s\left(\frac{S}{s}\right)^{\frac{x}{L}}$. En déduire que l'équation du pavillon s'écrit :

$$S(x) = se^{ax} .$$

Identifier le coefficient a.

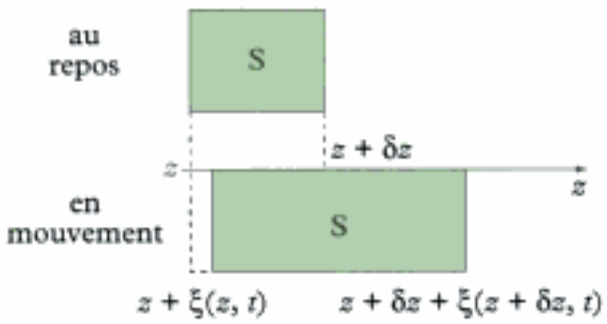
Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercice de niveau 1

Exercice 1

1) a. Au repos, la tranche de fluide d'épaisseur dz a une section S et un volume $\delta V_0 = S\delta z$.



En mouvement, on a :

$$\delta V = S\,[z + \delta z + \xi(z + \delta z, t) - z - \xi(z,t)]$$

soit à l'ordre 1 en δz : $\delta V = S\delta z\left[1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right]$. Finalement :

$$\boxed{\delta V = \left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right] \delta V_0}\ .$$

b. • Dans le cadre de l'approximation acoustique, les calculs sont limités aux termes d'ordre 1 en surpression, masse volumique et vitesse. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une tranche de fluide, on ne conserve que le terme $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ de l'accélération, celui en $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ étant d'ordre 2. Ainsi, on a :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p}$$

en négligeant toute influence de la pesanteur.

⚠ Noter également la présence de ρ_0 et non $\rho_{totale} = \rho_0 + \rho$ puisque $\rho\vec{v}$ est un terme d'ordre 2.

Or $\boxed{\vec{v} = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}\vec{u}_z}$, d'où :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p\,.$$

• Il reste à exprimer la surpression p en fonction de ξ. C'est l'hypothèse d'adiabaticité qui fournit la réponse. Avec :

Copyrighted material

$$\chi_0 = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p_{totale}}\right)_s$$

à l'ordre 1, on a :

$$\chi_0 \approx -\frac{1}{\delta V_0}\,\frac{\delta V - \delta V_0}{p}$$

Au dénominateur, il n'apparaît que p, la surpression. Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit d'un terme d'ordre 1 qui pourrait s'écrire : $\delta p_{totale} = p$ ou encore : $p = p_{totale} - p_0$

Avec le résultat de la question précédente, il vient : $\chi_0 = -\frac{1}{p}\frac{\partial \xi}{\partial z}$, qui donne :

$$\boxed{p = -\frac{1}{\chi_0}\frac{\partial \xi}{\partial z}}.$$

• Finalement, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p = -\frac{1}{\chi_0}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\vec{u}_z, \text{ puis } \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_0}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0}$$

équation de d'Alembert avec une vitesse de propagation $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$.

c. La solution générale de l'équation précédente s'écrit :

$$\boxed{\xi(z,t) = f(z - ct) + g(z + ct)}.$$

On en déduit l'expression de la vitesse $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$\boxed{v = c\left[g'(z + ct) - f'(z - ct)\right]}.$$

On utilise ici la relation de dérivation des fonctions composées :

$u : t \to z - ct$ et $f : u \mapsto f(u)$, d'où $(f \circ u)'(t) = f'(u(t))\, u'(t)$

La surpression est donnée par $p = -\frac{1}{\chi_0}\frac{\partial \xi}{\partial z}$, soit :

$$p = -\frac{1}{\chi_0}\left[g'(z + ct) + f'(z - ct)\right]$$

Avec $\frac{1}{\chi_0} = \rho_0 c^2$, on peut encore écrire :

$$\boxed{p = -c\, Z_c\left[g'(z + ct) + f'(z - ct)\right]}.$$

Copyrighted material

2) a. Avec l'équation d'Euler :

$$\rho_{totale}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p_{totale}$$

la relation issue du premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\rho_{totale}\,\frac{d}{dt}\left(u + \frac{v^2}{2}\right) = -\,p_{totale}\,\text{div}\,\vec{v} - \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,p_{totale}$$

$$\rho_{totale}\,\frac{du}{dt} + \rho_{totale}\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,p_{totale}\,\text{div}\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\left(\rho_{totale}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

soit, après simplification :

$$\boxed{\rho_{totale}\,\frac{du}{dt} = -\,p_{totale}\,\text{div}\,\vec{v}}$$

b. Dans l'approximation acoustique, la relation précédente s'écrit :

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -(p_0 + p)\,\frac{\partial v}{\partial z}.$$

⚠ u est un terme d'ordre 2. La relation issue du premier principe permet de s'en convaincre puisque u est ajouté à $\frac{v^2}{2}$, terme d'ordre 2. C'est pourquoi on ne garde que le terme en $\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}$, et non $\rho\frac{\partial u}{\partial t}$, dans le membre de gauche.

Sachant également que $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ et que $\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\chi_0 p$, il vient :

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -\,(p_0 + p)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = \chi_0(p_0 + p)\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

soit :

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\chi_0 p_0 p + \chi_0\,\frac{p^2}{2}\right]$$

À une constante près, l'énergie interne volumique $\rho_0 u$ s'écrit comme la somme de deux termes :

$$\boxed{\rho_0 u = \chi_0 p_0 p + \chi_0\frac{p^2}{2}}.$$

En moyenne, le premier a une contribution nulle puisque $< p > = 0$. Ainsi :

$$< \rho_0 u > = < \chi_0\frac{p^2}{2} >.$$

On définit une énergie potentielle volumique acoustique par :

$$\boxed{e_p = \chi_0\frac{p^2}{2}}.$$

c. L'énergie volumique totale s'écrit alors :

$$\boxed{e = \rho_0\frac{v^2}{2} + \chi_0\frac{p^2}{2}}.$$

Pour une onde acoustique plane progressive, on a :

$$\xi(z,t) = f(z - ct), \quad v = -\,cf'(z - ct), \quad p = -\,cZ_c f'(z - ct).$$

Copyrighted material

D'où : $p = Z_c\, v$ et $e = \rho_0 v^2$ puis, en valeur moyenne :

$$\boxed{< e > = < \rho_0 v^2 >}$$

Pour une onde plane progressive se propageant suivant Oz à la vitesse c, l'énergie moyenne transportée, pendant la durée dt, dans le volume Sc dt, est : $< e >$ Sc dt. D'où l'intensité acoustique :

$$I = \frac{< e > Sc\, dt}{S\, dt}, \text{ soit : } I = \rho_0 c < v^2 > \text{ ou encore : } \boxed{I = \frac{< p^2 >}{Z_c}}$$

Cette relation est à rapprocher de celle obtenue en électrocinétique : $P = \frac{U^2}{R}$, puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.

Exercices de niveau 2

Exercice 2

1) a. Dans un espace à trois dimensions, l'équation de d'Alembert pour la surpression s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0,$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$ dans l'approximation acoustique.

Si le problème présente la symétrie sphérique, la surpression p n'est fonction que de la distance r à la source et du temps : $p = p(r,t)$. L'équation de d'Alembert s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0}$$

b. L'équation précédente est une équation de d'Alembert à 1 dimension spatiale r. Sa solution générale est de la forme :

$$rp(r,t) = f(r - ct) + g(r + ct).$$

D'où :

$$\boxed{p(r,t) = \frac{1}{r} f(r - ct) + \frac{1}{r} g(r + ct)}.$$

La surpression est la somme de deux termes :

– une **onde sphérique divergente** qui se propage à la vitesse c et dont l'amplitude décroît comme $\frac{1}{r}$.

– une **onde sphérique convergente** qui se propage à la vitesse c et dont l'amplitude décroît également comme $\frac{1}{r}$.

L'onde qui s'écrit $f(r - ct)$ n'est pas plane mais sphérique puisque, à t fixé, la surface pour laquelle $r - ct$ est constant est une sphère de rayon r.

2) a. En raison de la linéarité de l'équation de d'Alembert, on peut adopter une représentation complexe et écrire le produit rp sous la forme $e^{j(\omega t - kr + \varphi)}$, pourvu que ω et k vérifient la relation :

$$\omega^2 = k^2 c^2.$$

Copyrighted material

Ainsi :

$$\underline{p}(r,t) = \frac{A}{r}\, e^{j(\omega t - kr + \varphi)}$$

avec $k = \pm\frac{\omega}{c}$, traduisant l'existence d'une onde sphérique divergente (en $\omega t - \frac{\omega}{c} r$) et d'une onde sphérique convergente (en $\omega t + \frac{\omega}{c} r$).

b. De la relation d'Euler $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p$, on déduit, en représentation complexe :

$$\rho_0 j\omega\, \underline{v} = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial r}, \text{ soit : } j\omega\rho_0\, \underline{v} = jk\, \underline{p} + \frac{1}{r}\, \underline{p}$$

qui donne :

$$\underline{v} = \frac{1}{\rho_0 \omega}\left(k - \frac{j}{r}\right) \underline{p}\,.$$

À grande distance, on a $kr >> 1$ de sorte que $\underline{v} = \frac{k}{\rho_0 \omega}\, \underline{p}$.

À grande distance de la source sonore, on retrouve une relation identique à celle obtenue dans le cas d'une onde plane. En effet, à grande distance, l'onde sphérique « ressemble » localement à une onde plane.

Avec $Z_c = \rho_0 c$ et sachant que $k = \pm\frac{\omega}{c}$, il vient :

$$\underline{v} = \pm\frac{1}{Z_c}\, \underline{p}\,.$$

c. • Par définition, l'intensité acoustique I est :

$$I = <\frac{dP}{dS}>$$

où P est la puissance échangée par le volume V limité par une surface fermée S, avec l'extérieur. On a :

$$dP = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Avec une onde sphérique progressive, la direction de propagation est colinéaire au vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$. En intégrant sur la surface d'une sphère de rayon r, dP s'écrit :

$$dP = \Pi(r,t)\, dS.$$

D'où : $I = <\Pi(r,t)>$, moyenne temporelle de la densité de courant $\Pi(r,t)$. En écrivant $\vec{\Pi} = p\vec{v}$, on trouve :

$$\Pi(r,t) = p(r,t)v(r,t), \text{ avec } p(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi) \text{ et } v(r,t) = \frac{A}{Z_c}\frac{1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi).$$

Pour une onde émise depuis une source, dans tout l'espace, seule l'onde divergente existe. L'onde convergente ne peut exister que si un obstacle renvoie l'onde incidente vers la source.

D'où :

$$I = \frac{A^2}{Z_c}\frac{1}{r^2} \underbrace{<\cos^2(\omega t - kr + \varphi)>}_{\frac{1}{2}}, \text{ soit : } I = \frac{A^2}{2Z_c}\frac{1}{r^2}.$$

Copyrighted material

• Avec la représentation complexe, un tel résultat ne peut être obtenu directement en raison du caractère quadratique du terme $p\vec{v}$. Cependant, le résultat précédent peut encore être obtenu en remarquant que :

$$< \underline{p}\,\underline{v}^{*} > = \frac{1}{Z_c} < \left|\underline{p}\right|^2 > = \frac{A^2}{Z_c}\ \frac{1}{r^2}.$$

Ainsi, pour une onde harmonique, on a :

$$\boxed{I = \frac{1}{2} < \underline{p}\,\underline{v}^{*} >}.$$

3) a. La membrane de la source sonore étant imperméable, il y a continuité de la vitesse radiale sur la sphère oscillante. Puisque $r_m << r_0$, on peut se contenter d'exprimer la continuité sur la sphère de rayon r_0. Ainsi :

$$v(r_0,t) = \frac{d}{dt}\left(r_0 + r_m \cos(\omega,t)\right)$$

avec $v(r,t)$ donnée par $\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial r}$. Nous avons établi, à la question 2. b, en représentation complexe :

$$\underline{v} = \frac{1}{\rho_0 \omega}\left(k - \frac{j}{r}\right)\underline{p}.$$

D'où, en représentation réelle :

$$v(r,t) = \frac{A}{\rho_0 \omega}\ \frac{k}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) + \frac{A}{\rho_0 \omega}\ \frac{1}{r^2} \sin(\omega t - kr + \varphi).$$

Puisque la condition aux limites est exprimée en $r = r_0$ et que, d'après l'énoncé $r_0 << \lambda$, l'approximation $kr >> 1$ n'est plus valable. Au contraire, on a $kr << 1$, de sorte que :

$$v(r,t) \approx \frac{A}{\rho_0 \omega}\ \frac{1}{r^2} \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

au voisinage de la membrane. Ainsi :

$$\frac{A}{\rho_0 \omega}\ \frac{1}{r_0^2} \sin(\omega t - kr_0 + \varphi) = -\omega r_m \sin(\omega t),$$

d'où :

$$kr_0 - \varphi = \pi \quad \text{et} \quad \frac{A}{\rho_0 \omega}\ \frac{1}{r_0^2} = \omega r_m$$

soit finalement :

$$\boxed{\varphi = kr_0 - \pi} \quad \text{et} \quad \boxed{A = \rho_0 \omega^2 r_m r_0^2}$$

b. L'intensité acoustique établie à la question 2.c, à grande distance de la source sonore, est :

$$I = \frac{\rho_0}{2c}\left(\frac{r_m}{r}\right)^2 (\omega r_0)^4.$$

La puissance acoustique moyenne qui traverse une sphère de rayon r est alors :

$$P = I \times 4\pi r^2 \text{ soit : } \boxed{P = \frac{2\pi\rho_0}{c} r_m^2 (\omega r_0)^4}$$

Copyrighted material

c. Ce résultat montre que la puissance acoustique dépend de la fréquence de l'onde sonore et de la taille de la source par l'intermédiaire du terme $(\omega r_0)^4$. Ainsi, pour ρ_0, c et r_m fixés, si la valeur de P est imposée, on constate que le produit ωr_0 est fixé. Les sons aigus (ω « élevée ») doivent donc être émis par des sources de « petite » taille r_0, alors que les sons graves (ω « faible ») doivent être émis par des sources de « grande » taille r_0.

Exercice 3

1) a. Sur la surface de séparation de deux milieux, il y a continuité de la composante normale de la vitesse et continuité de la pression acoustique. Dans les conditions de l'exercice, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} v_i(z=0,t) + v_r(z=0,t) = v_t(z=0,t) \\ p_i(z=0,t) + p_r(z=0,t) = p_t(z=0,t) \end{cases}$$

où les indices i, r, t font respectivement référence aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

b. On définit alors les coefficients relatifs aux surpressions par :

$$r_{12} = \frac{p_r(z=0,t)}{p_i(z=0,t)} \quad \text{et} \quad t_{12} = \frac{p_t(z=0,t)}{p_i(z=0,t)}.$$

Pour une onde plane, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} p_{im} + p_{rm} = p_{tm} \\ \dfrac{p_{im}}{Z_1} - \dfrac{p_{rm}}{Z_1} = \dfrac{p_{tm}}{Z_2} \end{cases}$$

en termes d'amplitudes. Alors :

$$r_{12} = \frac{p_{rm}}{p_{im}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$
$$t_{12} = \frac{p_{tm}}{p_{im}} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

⚠ Dans la condition de continuité relative aux vitesses, le signe «moins» pour l'onde réfléchie traduit le fait que celle-ci se propage dans le sens des z décroissants.

c. Dans le sens de propagation de l'onde, l'intensité acoustique est définie par :

$$I = <\frac{dP}{dS}>, \quad \text{avec} \quad dP = \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}.$$

D'où :

$$I = <\Pi>, \quad \text{avec} \quad \Pi = |pv|.$$

Pour une onde plane, progressive ou régressive, on a :

$$|p| = Z|v|.$$

D'où : $\Pi = \dfrac{p^2}{Z}$, puis $\boxed{I = \dfrac{<p^2>}{Z}}$.

d. Les coefficients relatifs aux intensités sont :

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad \text{et} \quad T = \frac{I_t}{I_i}$$

Copyrighted material

avec :

$$I_i = \frac{< p_i^2 >}{Z_1},\ I_r = \frac{< p_r^2 >}{Z_1},\ I_t = \frac{< p_t^2 >}{Z_2}.$$

Avec $p = p_m \cos(\omega t \pm kz)$, on a :

$$< p^2 > = \frac{p_m^2}{2}.$$

D'où :

$$R = \left(\frac{p_{rm}}{p_{im}}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_1}{Z_2}\left(\frac{p_{tm}}{p_{im}}\right)^2$$

soit :

$$R = (r_{12})^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_1}{Z_2}(t_{12})^2.$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}}.$$

On vérifie facilement que R + T = 1, relation qui traduit la **conservation de l'énergie**, en l'absence d'absorption.

e. Avec les valeurs proposées, sachant que $Z = \rho c$, on a :

$$Z_{air} = 416\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Z_{eau} = 1{,}4 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

D'où les coefficients relatifs aux intensités :

$$\mathbf{R_{air\text{-}eau} = 99{,}88\ \%} \quad \text{et} \quad \mathbf{T_{air\text{-}eau} = 0{,}12\ \%}.$$

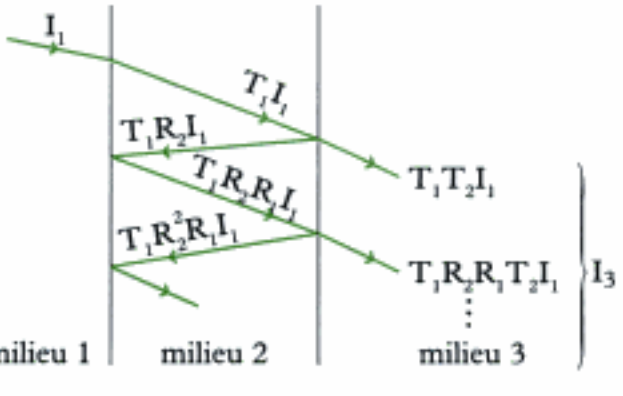
f. Les valeurs obtenues montrent que l'onde incidente est presque totalement réfléchie. L'adaptation d'impédance consiste, au contraire, à transmettre toute l'onde dans le milieu 2. Les impédances de l'air et de l'eau ne sont donc pas adaptées.

2) a. En reprenant les résultats de la question 1, on peut écrire :

$$\boxed{R_1 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$$

$$\boxed{R_2 = \left(\frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}\right)^2 \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{4Z_2Z_3}{(Z_2 + Z_3)^2}}$$

b. La situation est la suivante :



Copyright material

⚠ Par souci de clarté, les trajets des ondes ne sont pas perpendiculaires aux surfaces de séparation. Les calculs ne sont cependant valables que pour une incidence normale.

Négliger les phénomènes d'interférence revient à exprimer que l'intensité I_3 est la somme des intensités transmises. Ces dernières sont de la forme : $T_1(R_2R_1)^nT_2I_1$, où $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$I_3 = T_1 T_2 \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n \; I_1 .$$

On rappelle que si $|q| < 1$, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} .$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{I_3 = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2} I_1}$$

c. Posons $Z_1 = Z_{eau}$, $Z_2 = Z_{air}$, $Z_3 = Z_{détecteur}$. Compte tenu des valeurs des impédances, on a :

$$Z_2 << Z_1 \quad \text{et} \quad Z_2 << Z_3.$$

Posons : $\varepsilon_1 = \frac{Z_2}{Z_1} << 1$, $\varepsilon_2 = \frac{Z_2}{Z_3} << 1$.

Alors : $R_i = \left(\frac{1 - \varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i}\right)^2$ et $T_i = \frac{4\,\varepsilon_i}{(1 + \varepsilon_i)^2}$, avec $i = 1,2$. Puisque $\varepsilon_i << 1$, on a :

$$R_i \approx (1 - \varepsilon_i)^4 = 1 - 4\,\varepsilon_i \quad \text{et} \quad T_i = 4\,\varepsilon_i .$$

Alors : $1 - R_1 R_2 \approx 1 - (1 - 4\,\varepsilon_1)(2 - 4\,\varepsilon_2)$ soit, à l'ordre 1 en ε_1 et ε_2 :

$$1 - R_1 R_2 = 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

De même : $T_1 T_2 \approx 16\,\varepsilon_1 \varepsilon_2$.

D'où :

$$I_3 = \frac{4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} I_1, \quad \text{soit :} \quad I_3 = 4\,\frac{\frac{Z_2}{Z_1} \times \frac{Z_2}{Z_3}}{\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_3}} I_1 .$$

Après simplification, il reste :

$$\boxed{I_3 = \frac{4\,Z_2}{Z_1 + Z_3} I_1}.$$

Numériquement, on trouve un rapport :

$$\frac{I_3}{I_1} = 3 \cdot 10^{-4}.$$

L'onde sonore n'est pratiquement pas transmise jusqu'au détecteur.

d. En remplaçant l'air par la glycérine, les impédances sont du même ordre de grandeur. Les coefficients de réflexion prennent alors des valeurs sensiblement différentes de 1. La transmission est alors meilleure. Numériquement, on trouve :

Copyrighted material

$$R_1 = 7\ \% \quad \text{et} \quad T_1 = 93\ \%$$
$$R_2 = 1{,}3\ \% \quad \text{et} \quad T_2 = 98{,}7\ \%.$$

D'où le rapport :

$$\frac{I_3}{I_1} = 0{,}92\ .$$

e. Les valeurs précédentes nous montrent que l'onde incidente est à présent presque totalement transmise. Elle peut être raisonnablement captée par le détecteur. Ce résultat permet de justifier l'emploi d'un gel à base de glycérine pour réaliser une échographie. Le corps humain, essentiellement composé d'eau, joue le rôle du milieu 1. Le gel permet d'assurer l'adaptation d'impédance entre le corps humain et le détecteur.

Exercice 4

1) L'onde incidente se propage dans l'air, d'impédance acoustique Z_a, et se réfléchit en $x = L$ sur un matériau d'impédance acoustique Z_m. Le coefficient de réflexion $\underline{r}$ relatif aux surpressions s'écrit :

$$\boxed{\underline{r} = \frac{Z_m - Z_a}{Z_m + Z_a}\ .}$$

⚠ Le coefficient de réflexion $\underline{r}$ est réel. Pour retrouver son expression, voir le cours ou l'exercice 3.

2) Pour l'OPPH incidente, on peut écrire, en représentation complexe :

$$\underline{p}_i = \underline{p}_{im}\, e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_i = \frac{\underline{p}_i}{Z_a}\ .$$

Pour l'OPPH réfléchie, se propageant dans le sens des z décroissants, on a :

$$\underline{p}_r = \underline{p}_{rm}\, e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_r = -\frac{\underline{p}_r}{Z_a}\ .$$

En $z = L$, l'existence de la réflexion à tout instant, impose :

$$\underline{p}_r\,(z = L, t) = \underline{r}\ \underline{p}_i(z = L, t),$$

relation qui donne : $\underline{p}_{rm}\, e^{jkL} = \underline{r}\ \underline{p}_{im}\, e^{-jkL}$, soit : $\underline{p}_{rm} = \underline{r}\ \underline{p}_{im}\, e^{-2jkL}$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{p}_i(z,t) = \underline{p}_{im}\, e^{j(\omega t - kz)} \\ \underline{v}_i(z,t) = \dfrac{1}{Z_a}\ \underline{p}_i(z,t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{p}_r(z,t) = \underline{r}\ \underline{p}_{im}\, e^{j(\omega t + kz - 2kL)} \\ \underline{v}_r(z,t) = -\dfrac{1}{Z_a}\ \underline{p}_r(z,t) \end{cases}}$$

3) En tout point du tuyau, à tout instant, la pression acoustique et la vitesse s'écrivent :

$$\underline{p} = \underline{p}_i + \underline{p}_r \quad \text{et} \quad \underline{v} = \underline{v}_i + \underline{v}_r\ .$$

D'où l'expression de l'impédance ramenée :

$$\underline{Z} = Z_a\ \frac{e^{-jkz} + \underline{r}\ e^{j(kz - 2kL)}}{e^{-jkz} - \underline{r}\ e^{j(kz - 2kL)}}$$

Copyrighted material

soit :

$$\underline{Z} = Z_a \frac{1 + \dfrac{Z_m - Z_a}{Z_m + Z_a} e^{jk(2z-2L)}}{1 - \dfrac{Z_m - Z_a}{Z_m + Z_a} e^{jk(2z-2L)}}$$

ou encore :

$$\underline{Z} = Z_a \frac{2 Z_m \cos\left[k(L-z)\right] + 2j Z_a \sin\left[k(L-z)\right]}{2 Z_a \cos\left[k(L-z)\right] + 2j Z_m \sin\left[k(L-z)\right]}.$$

Finalement :

$$\underline{Z}(z) = Z_a \frac{Z_m + j Z_a \tan\left[k(L-z)\right]}{Z_a + j Z_m \tan\left[k(L-z)\right]}$$

Ce résultat est analogue à celui établi dans l'exercice 4 du chapitre 1, relatif à la ligne sans perte.

4) • Dans le cas où $\mathbf{Z_m = \infty}$, cas d'un milieu dense par rapport à l'air (paroi), on a :

$$\underline{Z} = -j \frac{Z}{\tan\left[k(L - z)\right]} \quad \text{et} \quad \underline{r} = 1.$$

L'onde incidente est **totalement réfléchie**. Le tuyau est alors le siège d'ondes stationnaires où les nœuds de la surpression correspondent aux ventres de la vitesse et inversement. En outre, en $z = L$, on a : $\underline{p}_r = \underline{p}_i$ et $\underline{v}_r = -\underline{v}_i$.

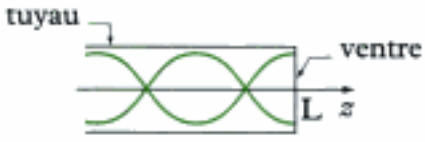
D'où :

$$\underline{v}(z = L, t) = 0.$$

En $z = L$, on obtient un nœud de vitesse.



vitesse



surpression

• Dans le cas où $\mathbf{Z_m = 0}$, cas d'un milieu peu dense par rapport à l'air, on a :

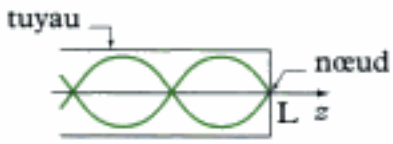
$$\underline{Z} = j Z_a \tan\left[k(L - z)\right] \quad \text{et} \quad \underline{r} = -1.$$

L'onde incidente est encore **totalement réfléchie**. Le tuyau est le siège d'ondes stationnaires comme précédemment, mais en $z = L$, on a à présent un nœud de pression :

$$\underline{p}(z = L, t) = 0.$$



vitesse



surpression

Copyrighted material

• Dans le cas où $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}_a$, on trouve :

$$\underline{Z} = Z_a \quad \text{et} \quad \underline{r} = 0 .$$

L'onde incidente n'est pas réfléchie. Tout se passe comme si l'onde se propageait dans un milieu illimité spatialement.

Exercice 5

1) a. Si $Z_1 = \frac{1}{S_1}\rho_0 c$ et $Z_2 = \frac{1}{S_2}\rho_0 c$ désignent les impédances acoustiques des deux milieux séparés par la discontinuité, on a :

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}} .$$

⚠ Ce résultat a déjà été démontré plusieurs fois. Nous l'utilisons directement dans cet exercice.

Avec : $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{S_2}{S_1} = x$, on a :

$$r = \frac{1 - x}{1 + x} .$$

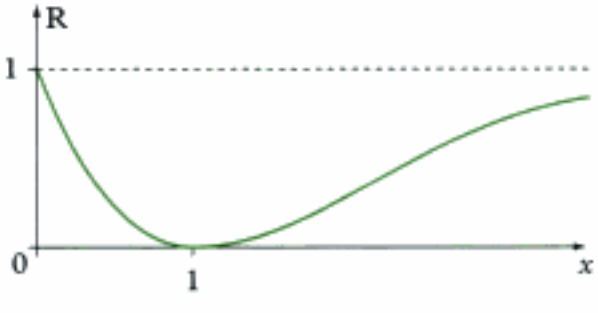
Le coefficient de réflexion R relatif aux puissances acoustiques est : $R = r^2$. D'où :

$$\boxed{R = \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2} .$$

b. Étudions les variations de R. On a :

$$\frac{dR}{R} = 2\left(\frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{x+1}\right), \text{ soit : } \frac{dR}{dx} = \frac{4R}{(x-1)(x+1)}$$

qui donne : $\frac{dR}{dx} = 4\,\frac{x-1}{(x+1)^3}$. Ainsi $\frac{dR}{dx}$ s'annule en $x = 1$. Il s'agit d'un minimum. D'où l'allure de la fonction $R(x)$ donnée ci-dessous :



⚠ Outre les variations de R en fonction de x, une analyse rapide de $R(x)$ montre que $R = 1$ en $x = 0$ et $x \to \infty$. Comme $0 \leq R \leq 1$ pour des raisons physiques et que R dépend continûment de x, $x = 1$ correspond à un minimum.

En $x = 1$, on a $S_1 = S_2$. La discontinuité n'existe plus. L'onde incidente poursuit sa propagation sans réflexion.

Copyrighted material

c. Lorsque $x \to 0$ à S_1 fixé, cela revient à prendre $S_2 = 0$. Le tuyau est fermé en $z = L$ et l'onde est totalement réfléchie ($R = 1$). Lorsque $x \to \infty$ à S_1 fixé, cela revient à prendre $S_2 \to \infty$. Le tuyau est à présent ouvert en $z = L$ et l'onde est encore totalement réfléchie.

Ainsi, que le tuyau soit ouvert ou fermé, il y a réflexion totale de l'onde à son extrémité. Toutefois, ces deux situations se distinguent par les conditions aux limites qu'elles imposent. Quand le tuyau est fermé, la continuité du débit volumique en $z = L$ impose :

$$\boldsymbol{v(z = L,t) = 0.}$$

Le tuyau de section S_1 est le siège d'ondes stationnaires qui présentent un nœud de vitesse en $z = L$.

Quand le tuyau est ouvert en $z = L$, il est le siège d'ondes stationnaires qui présentent un nœud de surpression en $z = L$.

$$\boldsymbol{p(z = L,t) = 0.}$$

2) a. Le tuyau étant le siège d'ondes stationnaires, on peut toujours écrire le champ de pression acoustique sous la forme :

$$p(z,t) = p_m \cos(\omega t + \varphi) \cos(kz + \phi)$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de l'onde.

Ce sont les conditions initiales et aux limites qui permettent de déterminer p_m, φ et ϕ. Mais cela importe peu ici. Il nous suffit de connaître la nature relative (paire ou imparie) des conditions aux extrémités pour trouver la fréquence fondamentale.

• Pour un jeu de conditions aux limites pair, on a, à tout instant :

$$p(z = 0,t) = p(z = L,t)$$

que p soit nulle (tuyau ouvert) ou maximale (tuyau fermé) aux deux extrémités.

Alors :

$$\cos(kL + \phi) = \cos\phi$$

qui donne : $kL = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $k = \dfrac{2\pi}{c} f$, il vient :

$$f_n = \frac{nc}{L}.$$

La fréquence la plus basse est obtenue pour $n = 1$. C'est la fondamentale : $\boxed{f_1 = \dfrac{c}{L}}$. Ainsi :

$\boxed{f_n = n f_1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (conditions paires).

• Pour un jeu de conditions aux limites impair, on a, à tout instant :

$$p(z = 0,t) = p\left(z = L - \frac{\lambda}{2}, t\right)$$

où λ désigne la longueur d'onde donnée par $\dfrac{2\pi}{k}$. Alors :

$$\cos(kL - \pi + \phi) = \cos\phi$$

qui donne : $kL - \pi = 2\pi(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. D'où :

$$f_n = (2n - 1)\frac{c}{2L}.$$

Copyrighted material

La fréquence la plus basse (pour laquelle $n = 1$), est :

$$\boxed{f_1 = \frac{c}{2L}}.$$

On a alors :

$\boxed{f_n = (2n-1)f_1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (conditions impaires).

b. • Pour la flûte, avec des conditions paires, on a :

$$f_1 = \frac{c}{L}, \text{ d'où : } L = \frac{c}{f_1} = \mathbf{103\ cm.}$$

• Pour la clarinette, les conditions impaires imposent :

$$f_1 = \frac{c}{2L}.$$

Avec L = 103 cm, on trouve $f_1 = \frac{330}{2}$, soit :

$$\boldsymbol{f_1 = 165\ Hz.}$$

La clarinette joue donc **plus bas** que la flûte.

• Avec un tuyau de longueur L = 10,6 m et f_1 = 16 Hz, on a :

$$L f_1 = 169{,}6\ m \cdot s^{-1}$$

qui correspond à la moitié de la vitesse de propagation du son dans l'air. Le tuyau a donc un jeu de conditions **impair**.

Exercice de niveau 3

Exercice 6

1) Lorsqu'une onde sonore est transmise d'un milieu 1, d'impédance acoustique Z_1, vers un milieu 2, d'impédance acoustique Z_2, le coefficient de transmission en puissance s'écrit :

$$T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

Dans notre problème, les milieux sont de même nature. Seule la géométrie du tuyau modifie les expressions des impédances acoustiques : $s\ Z_1 = S\ Z_2 = \varphi_0 c$. D'où :

$$T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(1 + Z_1 Z_2)^2} \text{ qui donne : } \boxed{T = \frac{4\frac{S}{s}}{\left(1 + \frac{S}{s}\right)^2}}$$

2) Avec un tuyau composé de trois cylindres, le coefficient de transmission global est simplement le produit des coefficients de transmission locaux :

$$T = \frac{4\frac{S_1}{s}}{\left(1 + \frac{S_1}{s}\right)^2} \times \frac{4\frac{S}{S_1}}{\left(1 + \frac{S}{S_1}\right)^2}.$$

Copyrighted material

Pour rechercher la valeur de S_1 qui rend T maximal, on exprime tout d'abord ln T en fonction de S_1, puis on calcule la dérivée logarithmique. On a :

$$\ln T = -2 \ln\left(1 + \frac{S_1}{s}\right) - 2 \ln\left(1 + \frac{S}{S_1}\right) + C$$

où C ne contient que des termes en s et S, indépendants de S_1. On a alors :

$$\frac{dT}{T} = -2 \frac{dS_1}{s + S_1} + 2 \frac{dS_1}{S_1} \frac{S}{S + S_1}$$

puis : $\frac{dT}{T} = 2 \frac{dS_1}{S_1} \frac{sS - S_1^2}{(s + S_1)(S + S_1)}$.

Ainsi : $\frac{dT}{dS_1} = 0$ si $S_1 = \sqrt{sS}$.

On peut facilement se convaincre que $T\left(\sqrt{sS}\right)$ est un maximum car T est une fonction continue positive de S_1 qui s'annule en $S_1 = 0$ et S_1 infini. On a ainsi :

$$T_{max} = \frac{16 \frac{S}{s}}{\left(1 + \sqrt{\frac{S}{s}}\right)^4}$$

3) a. Envisageons les sections S_{k-1}, S_k et S_{k+1}. Pour que la transmission soit maximale entre $s = S_0$ et $S = S_{N-1}$, elle doit l'être entre S_{k-1} et S_{k+1}. La relation établie à la question précédente :

$S_1^2 = sS$ peut s'écrire $\frac{S_1}{s} = \frac{S}{S_1}$. Elle donne, dans notre cas :

$$\frac{S_{k+1}}{S_k} = \frac{S_k}{S_{k-1}}, \text{ pour tout } k = 1, 2, \ldots, N-2.$$

Le rapport $\frac{S_{k+1}}{S_k}$ est constant. Notons le m pour la suite.

b. La relation précédente donne alors :

$$\frac{S_{N-1}}{S_{N-2}} = \frac{S_{N-2}}{S_{N-3}} = \ldots = \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S_0}.$$

En faisant le produit de tous ces rapports, on trouve : $\frac{S_{N-1}}{S_0}$, soit $\frac{S}{s}$. Avec la définition de m donnée ci-dessus, on a :

$$\frac{S}{s} = m^{N-1}.$$

Le coefficient de transmission entre S_k et S_{k+1} est :

$$T_{k,k+1} = \frac{4 \frac{S_{k+1}}{S_k}}{\left(1 + \frac{S_{k+1}}{S_k}\right)^2} \text{ soit : } T_{k,k+1} = \frac{4m}{(1 + m)^2}.$$

Copyrighted material

Le coefficient de transmission global maximal est alors :

$$T_{max} = T_{0,1}\, T_{1,2}\, \ldots\, T_{N-2,N-1} \text{ soit : } \boxed{T_{max} = \left[\frac{4\,m}{(1+m)^2}\right]^{N-1}}$$

c. On a : $m = 1 + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| << 1$. D'où :

$$\frac{S}{s} = (1+\varepsilon)^{N-1}$$

puis à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{S}{s} \approx 1 + (N-1)\,\varepsilon \ .$$

On rappelle que si $|x| << 1$, on a : $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

Ainsi :

$$\boxed{\varepsilon \approx \frac{1}{N-1}\left(\frac{S}{s} - 1\right)}$$

Alors : $T_{max} = \left[\dfrac{4\,(1+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)^2}\right]^{N-1}$, soit :

$$T_{max} = \left[\frac{1+\varepsilon}{\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right]^{N-1} .$$

À l'ordre 2 en ε, on peut écrire :

$$T_{max} \approx [(1+\varepsilon)\,(1-\varepsilon)]^{N-1}, \quad \text{soit : } \boxed{T_{max} \approx 1 - (N-1)\,\varepsilon^2} .$$

d. En reprenant le résultat établi à la question précédente :

$$\varepsilon = \frac{1}{N-1}\left[\frac{S}{s} - 1\right]$$

on trouve finalement :

$$T_{max} \approx 1 - \frac{1}{N-1}\left[\frac{S}{s} - 1\right]^2$$

Quand $N \to \infty$, on obtient $\mathbf{T_{max} \to 1}$. La transmission maximale réalise, dans ces conditions, une **adaptation d'impédance parfaite** entre l'entrée du tuyau et la sortie.

e. Avec les notations proposées, on a :

$$\frac{S_k}{S_0} = m^k \ , \text{ puis : } \frac{S_k}{s} = \left(\frac{S}{s}\right)^{\frac{x}{(N-1)\,\Delta x}} .$$

À la limite continue, on a :

$$\frac{x}{(N-1)\,\Delta x} = \frac{N}{N-1}\,\frac{x}{L}$$

qui tend vers $\dfrac{x}{L}$ quand N tend vers l'infini.

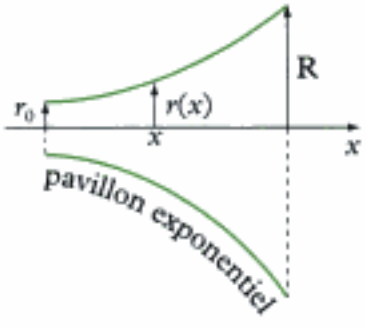
Copyrighted material

Ainsi $S_k \to S(x)$ avec :

$$S(x) = s\left(\frac{S}{s}\right)^{\frac{x}{L}}.$$

Nous venons d'établir la loi de variation de la section du tuyau qui réalise l'adaptation d'impédance. Une telle loi permet de justifier la forme donnée à certains instruments de musique (trompette, clarinette) ou à un porte-voix. On peut écrire :

$$S(x) = se^{ax}, \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{S}{s}\right).$$



$$r(x) = r_0\left(\frac{R}{r_0}\right)^{\frac{x}{L}}$$

$$\left(\text{avec } r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$$

Copyrighted material

CHAPITRE

3 Ondes électromagnétiques dans le vide

Ouverture

Chacun connaît l'importance des communications hertziennes dans la vie courante. Radio, télévision, téléphonie mobile en sont autant d'exemples. L'information transmise, véhiculée par une onde électromagnétique, se propage d'un émetteur vers un récepteur. Ce chapitre décrit la propagation d'une telle onde électromagnétique dans un milieu vide de charges et de courants.

Plan du chapitre 3

A. Équation d'ondes
1. Équations de couplage . . . 94
2. Équations d'onde . . . 94
3. Retour sur l'approximation des régimes quasi stationnaires . . . 95

B. Solutions en ondes planes
1. Ondes planes progressives . . . 96
2. Structure des OPPH . . . 96
3. Polarisation . . . 97

C. Aspects énergétiques
1. Vecteur de Poynting d'une OPPH . . . 99
2. Densité volumique d'énergie . . . 99
3. Propagation de l'énergie . . . 100

D. Rayonnement du dipôle oscillant (filière PC)
1. Description du dipôle . . . 100
2. Zone de rayonnement du dipôle . . . 100
3. Expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. . . 101
4. Propriétés du champ rayonné . . . 103
5. Puissance rayonnée par le dipôle . . . 103

E. Notions élémentaires sur la diffusion (filière PC)
1. Phénomène de diffusion . . . 104
2. Modèle de l'électron élastiquement lié . . . 104
3. Diffusion Rayleigh . . . 105
4. Polarisation par diffusion . . . 107

Méthodes . . . 108

Exercices . . . 114

Copyright material

A. Équation d'ondes

A.1. Équations de couplage

Des charges électriques, de densité volumique ρ et de densité de courant $\vec{j}$, sont les sources d'un champ électromagnétique caractérisé par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Si les charges occupent une région limitée de l'espace, la région de l'espace où elles ne sont pas présentes est appelée le vide. En tout point du vide, le champ électromagnétique existe encore puisque l'effet des sources se fait ressentir à distance.

Les équations de Maxwell donnent l'évolution du champ électromagnétique. Elles constituent, comme l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler pour les fluides, des **équations de couplage linéaires** entre le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

Loi 1

Équations de Maxwell

Dans le vide, les équations de Maxwell définissant le champ électrique $\vec{E}$ (en $V \cdot m^{-1}$) et le champ magnétique $\vec{B}$ (en T) s'écrivent[1] :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{div}\vec{E} = 0 \\ \text{(ii)} & \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} & \mathbf{div}\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} & \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

ε_0 désigne la permittivité du vide et s'exprime en farad par mètre ($F \cdot m^{-1}$).

μ_0 désigne la perméabilité du vide et s'exprime en henry par mètre ($H \cdot m^{-1}$).

1. Dans les régions où les charges sont présentes, les équations (i) et (iv) s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{(iv)} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

2. Dans le Système International d'unités, la seconde et le mètre, unités fondamentales, sont définis à partir de la valeur de c. Une autre unité fondamentale est l'ampère (A). Une intensité électrique de 1 A est définie par l'intensité du courant constant parcourant deux fils conducteurs infinis et parallèles (de sections circulaires négligeables) séparés de 1 m, placés dans le vide, provoquant entre ces deux conducteurs une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N·m^{-1}. Cette définition fixe alors la valeur de μ_0 :

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ H \cdot m^{-1},$$

puis celle de ε_0 :

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F \cdot m^{-1}.$$

Remarque

Les constantes ε_0 et μ_0 ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Elles sont liées par la relation[2] :

$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, c désignant la célérité de la lumière dans le vide.

Par analyse dimensionnelle, on peut introduire l'impédance du vide Z_0 (en Ω) définie par :

$$Z_0 = \mu_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

A.2. Équations d'onde

On peut chercher à découpler les équations précédentes en éliminant l'un des champs au profit de l'autre. Pour le champ électrique $\vec{E}$, on a avec (ii) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).$$

En analyse vectorielle, l'identité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}) - \Delta$, associée à l'équation (i), donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}.$$

Les variables spatiales et temporelle sont indépendantes. On peut donc permuter les dérivées spatiales et temporelles. Ainsi, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})}{\partial t},$$

ce qui permet d'écrire l'équation d'évolution du champ électrique $\vec{E}$ d'après (iv) :

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}\,.$$

Pour le champ magnétique, l'équation d'évolution s'obtient de manière analogue avec (iv) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \text{ soit}^3 : \ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \vec{0}\,.$$

3. On utilise l'équation (iii) pour transformer le membre de gauche et l'équation (ii) pour transformer le membre de droite.

Propriété 1

Les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont chacun solution d'une **équation de d'Alembert** que l'on peut mettre sous la forme[4] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ est la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide.

4. Dans certains problèmes, on trouve parfois l'opérateur d'Alembertien noté $\square$ et défini par :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,.$$

Les équations d'évolution de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent alors :

$\square \vec{E} = \vec{0}$ et $\square \vec{B} = \vec{0}$.

Notons que ces équations sont, dans leur écriture, semblables à celles rencontrées dans l'étude de la propagation des ondes sonores. Une différence notable entre les deux phénomènes réside cependant dans le fait que si les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide, les ondes sonores ne peuvent se propager que dans un milieu matériel.

A.3. Retour sur l'approximation des régimes quasi stationnaires

Considérons une région de l'espace dont la plus grande dimension est d et où existent des charges (densité volumique ρ) et des courants (densité de courant $\vec{j}$) libres. Ces charges et ces courants sont à l'origine d'un champ électromagnétique variable dans l'espace et dans le temps. Un champ électromagnétique dont les variations temporelles sont harmoniques de fréquence f peut être caractérisé par sa période T. Pour parcourir l'ensemble de la distribution de charges et de courants à la vitesse c, le champ met une durée de l'ordre de d / c. Si cette durée reste faible devant T, on peut estimer que le champ électromagnétique n'a pratiquement pas varié d'un point de vue temporel à l'échelle de la distribution. On peut donc négliger les phénomènes de propagation pour décrire le champ.

L'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) s'écrit :

$$d \ll cT\,,$$

où d est la plus grande dimension de l'espace considéré (en m), c la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et T la période des variations harmoniques du champ électromagnétique (en s).

Dans l'ARQS, tout se passe donc comme si la célérité c de l'onde tendait vers l'infini. Or l'existence du phénomène de propagation est liée au couplage entre les champs électrique et magnétique. Ce couplage est présent dans les équations de Maxwell (ii) et (iv) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Dans un milieu porteur de charges, en négligeant le courant de déplacement $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant libre $\vec{j}$,

on élimine partiellement le couplage, mais complètement la propagation du champ. C'est cette condition qu'exprime l'ARQS :

$$\boxed{\left|\vec{j}_d\right| \ll \left|\vec{j}\right|}.$$

B. Solutions en ondes planes

B.1. Ondes planes progressives

Les équations de d'Alembert vérifiées par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un ensemble de deux équations vectorielles, c'est-à-dire de six équations scalaires. Loin des sources, chaque équation admet une solution de type «onde plane», pour une direction de propagation de vecteur $\vec{u}$ donnée, de la forme :

$$f\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right).$$

La linéarité des équations permet d'utiliser le principe de superposition pour décomposer ces solutions en combinaisons linéaires d'ondes planes harmoniques. Pour cette raison, par la suite, on s'intéressera uniquement aux solutions harmoniques proportionnelles à :

$$\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}), \text{ avec } \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}.$$

Toujours en raison de la linéarité des équations, on peut adopter la représentation complexe des OPPH associées aux champs :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \underline{\vec{B}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{B}}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}}.$$

Les propriétés des ondes électromagnétiques peuvent être dégagées à partir de ces expressions **sans perte de généralité**.

B.2. Structure des OPPH

B.2.1. Onde transversale

Avec la représentation complexe des OPPH, l'opérateur de divergence est équivalent à un produit scalaire : $\text{div}\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$. Les équations de Maxwell (i) et (iii) peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{(iii)} \quad \text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \end{cases}$$

Copyrighted material

En prenant les parties réelles, on déduit que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux au vecteur $\vec{k}$, lui-même colinéaire à la direction de propagation définie par le vecteur $\vec{u}$: les OPPH électromagnétiques sont donc des **ondes transversales**[5]. Cette propriété constitue une autre différence avec les ondes sonores qui elles, sont longitudinales.

5. Cette propriété constitue une autre différence avec les ondes sonores, qui sont longitudinales.

B.2.2. Lien entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Avec la représentation complexe des OPPH, l'opérateur rotationnel est équivalent à un produit vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$. Les équations de Maxwell (ii) et (iv) apportent alors une information supplémentaire sur la structure des OPPH :

$$\begin{cases} \text{(ii)} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow \quad -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \\ \text{(iv)} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \Rightarrow \quad -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = j\mu_0 \varepsilon_0 \omega \underline{\vec{E}} \end{cases}$$

6. On rappelle que :
$\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$ et $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

En prenant les parties réelles, on obtient les deux équations[6] :

$$\begin{cases} \vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \\ \vec{E} = -\dfrac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} = -c\vec{u} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes. Elles montrent que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

Propriété 2

Pour une OPPH de vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ vérifient (fig. 1) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}, \text{ avec } (\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}) \text{ trièdre direct}^{7}.$$

7. Ce résultat synthétise à la fois le fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux à $\vec{k}$ et qu'ils sont orthogonaux entre eux.

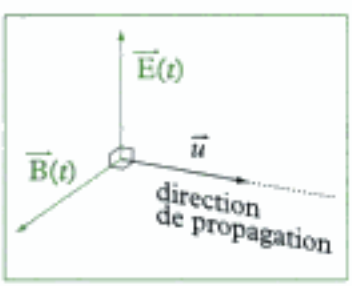


Fig. 1 - Structure d'une onde plane.

Le rapport des champs E / B est égal à la célérité c de l'onde électromagnétique. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent donc **en phase**. Tous les résultats établis dans le cas des OPPH s'étendent au cas plus général des ondes planes (non nécessairement harmoniques) grâce à l'analyse de Fourier.

B.3. Polarisation

En raison du caractère vectoriel des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les solutions des équations d'ondes doivent non seulement préciser les dépendances spatio-temporelles des champs, mais également la direction et le sens des vecteurs. Cette dernière information constitue la **polarisation de l'onde**. Plus précisément, puisque le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ est direct, par convention, la polarisation est celle du champ électrique, et celle du champ magnétique s'en déduit immédiatement.

Pour illustrer cette notion, considérons une OPPH se propageant dans la direction $\vec{u} = \vec{u}_z$. Le champ électrique $\vec{E}$ prend alors la forme[8] :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{m,x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{m,y} \cos(\omega t - kz - \phi) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

8. La coordonnée selon l'axe des z est nulle car le vecteur $\vec{E}$ appartient à un plan perpendiculaire à cet axe.

Copyrighted material

• Dans **le cas général où $E_{m,x} \neq E_{m,y}$ et $\phi \neq 0$ ou π**, pour z fixé, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit au cours du temps une ellipse dans un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$. On dit que la **polarisation est elliptique**. On distingue par ailleurs deux polarisations elliptiques selon le sens dans lequel l'ellipse est parcourue quand un observateur voit l'onde venir à sa rencontre (fig.2) :
– si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique, la polarisation est dite *gauche* ;
– si l'ellipse est parcourue dans le sens inverse, la polarisation est dite *droite*.

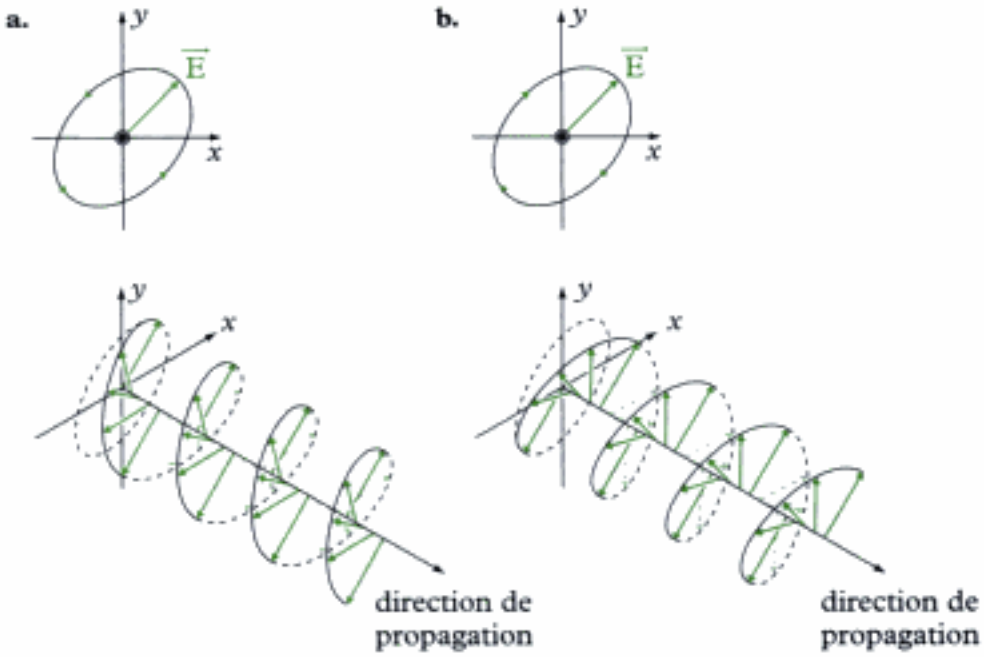


Fig. 2 - **a.** Polarisation elliptique gauche. **b.** Polarisation elliptique droite.

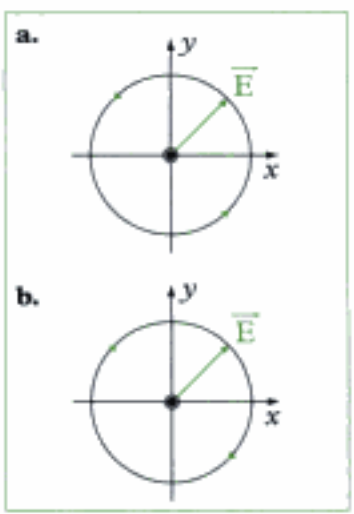


Fig. 3 - **a.** Polarisation circulaire gauche.
b. Polarisation circulaire droite.

• Dans **le cas particulier où $E_{m,x} = E_{m,y}$ et $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$**, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit un cercle (fig.3) : on parle alors de **polarisation circulaire gauche ou droite**.

• Dans **le cas particulier où $E_{m,x} \neq E_{m,y}$ et $\phi = 0$ ou π**, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit un segment (fig.4) : on parle alors de **polarisation rectiligne**.

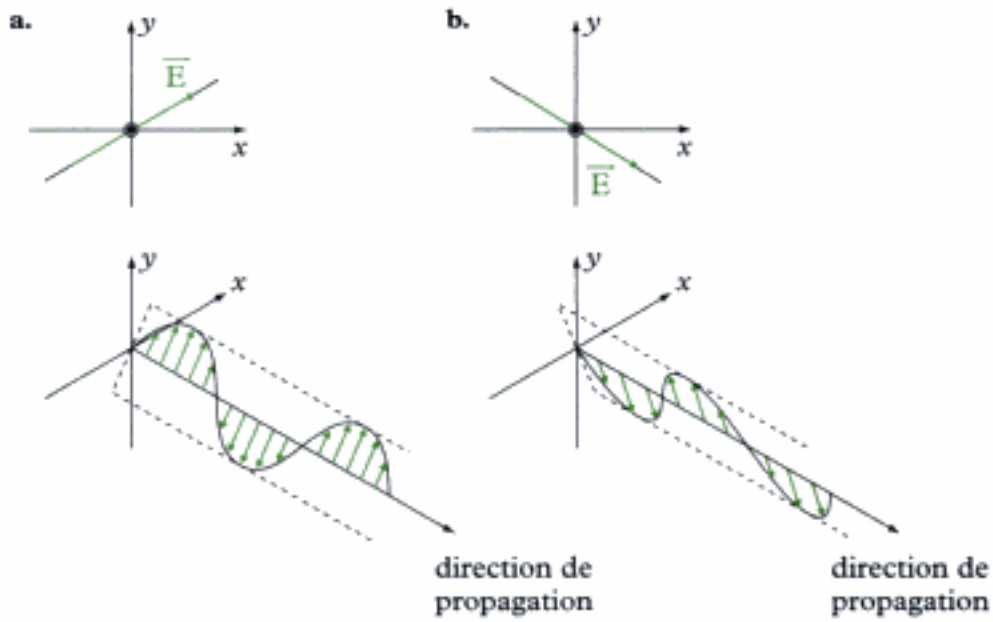


Fig. 4 - **a.** Polarisation rectiligne ($\phi = 0$). **b.** Polarisation rectiligne ($\phi = \pi$).

Copyrighted material

Si la polarisation elliptique représente la situation la plus générale, la linéarité de la décomposition vectorielle permet d'exprimer tout champ électrique comme combinaison linéaire de champs polarisés rectilignement. En effet :

$$\vec{E} = \underbrace{E_{m,x}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x}_{\substack{\text{polarisation rectiligne} \\ \text{avec } E_{m,y}=0}} + \underbrace{E_{m,y}\cos(\omega t - kz - \phi)\vec{u}_y}_{\substack{\text{polarisation rectiligne} \\ \text{avec } E_{m,x}=0}}.$$

C. Aspects énergétiques

C.1. Vecteur de Poynting d'une OPPH

Le cours d'électromagnétisme a permis d'introduire et d'interpréter le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Pour une OPPH, compte tenu de la relation liant le champ magnétique $\vec{B}$ et le champ électrique $\vec{E}$, on a :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \right), \text{ soit : } \vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$$ [9].

En valeur moyenne, avec $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, le vecteur de Poynting vaut :

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2} \vec{u}}$$ [10].

9. Ou $\vec{\Pi} = \frac{cB^2}{\mu_0}\vec{u}$.

10. Ou $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}\vec{u}$.

C.2. Densité volumique d'énergie

La densité volumique d'énergie électromagnétique e est définie par :

$$e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Dans le cas d'une OPPH, on sait que :

$$E^2 = c^2 B^2, \text{ avec } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

Il y a donc équipartition entre les contributions du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$ à l'énergie électromagnétique :

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \text{ d'où : } e = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Avec $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie vaut :

$$\boxed{\langle e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} = \frac{B_m^2}{2\mu_0}}.$$

Cette valeur moyenne est constante. Intégrée sur tout l'espace dans lequel l'onde se propage, on aboutit à une énergie électromagnétique infinie. Ce résultat montre qu'une OPPH, même si elle permet de dégager les propriétés essentielles d'une onde, n'a aucun caractère physique. Nous verrons dans le chapitre consacré aux phénomènes de dispersion que seul le paquet d'ondes, superposition d'une infinité d'OPPH, a un caractère physique.

Copyrighted material

C.3. Propagation de l'énergie

Les résultats précédents permettent également de déterminer la vitesse de propagation de l'énergie dans le vide définie par le rapport $\langle \vec{\Pi} \rangle / \langle e \rangle$. Dans le cas d'une OPPH, on a :

$$\frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle e \rangle} = c\vec{u} .$$

L'énergie se propage donc à la vitesse c dans la direction $\vec{u}$. Ce résultat est indépendant de l'OPPH considérée. Dans le vide, toutes les OPPH se propagent à la même vitesse c, qui est la célérité de la lumière.

D. Rayonnement du dipôle oscillant (filière PC)

D.1. Description du dipôle

Définition 1

Deux charges électriques immobiles opposées $-q$ et q et situées respectivement aux points N et P dans l'espace forment un **dipôle électrique** caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p}$ (fig.5) :

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}\ ^{11}.$$

11. Le moment dipolaire p s'exprime donc en C·m.

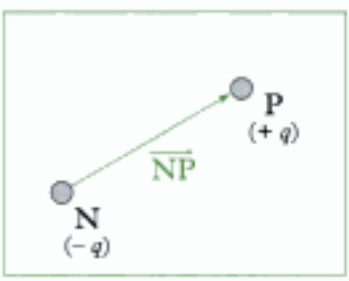


Fig. 5 - Moment dipolaire $\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$.

Lorsque les charges sont mobiles, le dipôle existe encore, mais son moment dipolaire $\vec{p}(t)$ évolue au cours du temps.

La notion de dipôle se généralise à une assemblée de plus de deux charges. Dès qu'une distribution de charges est globalement neutre, on peut en effet définir un moment dipolaire total comme la somme, si elle n'est pas nulle, des moments dipolaires de la distribution.

Remarque

En physique, les dipôles jouent un rôle tout particulier. Au niveau moléculaire, l'existence de différences d'électronégativité entre les atomes d'une molécule est à l'origine d'un moment dipolaire permanent. La prise en compte de ce moment dipolaire permet d'expliquer l'existence d'interactions entre les molécules. C'est également le moment dipolaire qui permet d'expliquer simplement les phénomènes de diffusion des ondes électromagnétiques. Enfin, à l'ère de la communication, nul ne saurait ignorer l'importance des antennes, dont le comportement est proche de celui d'un dipôle.

D.2. Zone de rayonnement du dipôle

D.2.1. Dipôle oscillant

Pour simplifier l'étude, on considèrera par la suite un **dipôle oscillant** dont le moment dipolaire $\vec{p}(t)$, de direction fixe Oz dans l'espace, varie de manière sinusoïdale avec le temps :

$$\vec{p}(t) = p_m \cos(\omega t)\vec{u}_z .$$

Copyrighted material

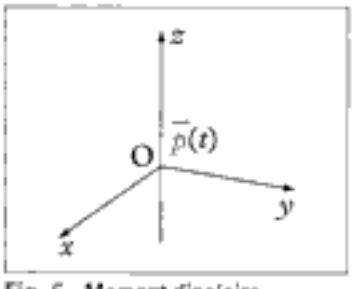


Fig. 6 - Moment dipolaire de direction Oz.

Le dipôle, situé à l'origine O d'un système d'axes (fig.6), est la source d'un champ électromagnétique rayonné dans tout l'espace. Dans le cas général, la recherche analytique des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ est relativement compliquée. Cependant, certaines approximations justifiées donnent des expressions simples de ces champs, facilitant par la même occasion leur interprétation physique.

D.2.2. Première hypothèse

Tout d'abord, on considère que les particules chargées en mouvement dans le dipôle sont non relativistes. Leur vitesse v reste donc très petite devant la célérité c de la lumière dans le vide :

$$v \ll c\,.$$

Cette relation peut s'exprimer de manière équivalente en introduisant la taille caractéristique a du dipôle et la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique créée. En notant T la période des oscillations du dipôle, on a en effet les ordres de grandeurs :

$$v \approx \frac{a}{T} \text{ et } c = \frac{\lambda}{T}, \text{ d'où : } \boxed{a \ll \lambda}\,.$$

Cette hypothèse est facilement vérifiée pour des dipôles de tailles atomiques ou moléculaires. Elle n'est en revanche pas vérifiée dans le cas des antennes, assimilables à des dipôles oscillants, dont les dimensions sont généralement de l'ordre de λ. Toutefois, en décomposant une antenne en antennes élémentaires de petites tailles, on pourra appliquer les résultats à chaque antenne élémentaire, puis sommer les contributions pour déterminer le champ électromagnétique total résultant.

D.2.3. Deuxième hypothèse

L'approximation dipolaire[12] consiste à ne rechercher les champs que dans des régions de l'espace situées à des distances r du dipôle grandes devant la taille caractéristique a de celui-ci :

$$a \ll r\,.$$

Dans le domaine des communications, les longueurs d'ondes du champ électromagnétique rayonné varient de quelques centimètres à quelques kilomètres. Au niveau atomique, les longueurs d'onde des rayonnements sont comprises entre quelques nanomètres et quelques millimètres. En général, la réception a lieu en des points situés à «grande» distance de la source comparativement à ces valeurs. On peut donc faire l'approximation supplémentaire :

$$\lambda \ll r\,.$$

On dit que l'on se place dans la **zone de rayonnement** de l'émetteur. Cette approximation est l'opposée de l'ARQS, car le phénomène de propagation est ici prépondérant. Conformément au programme, on retiendra la relation d'ordre entre les trois échelles caractéristiques du problème :

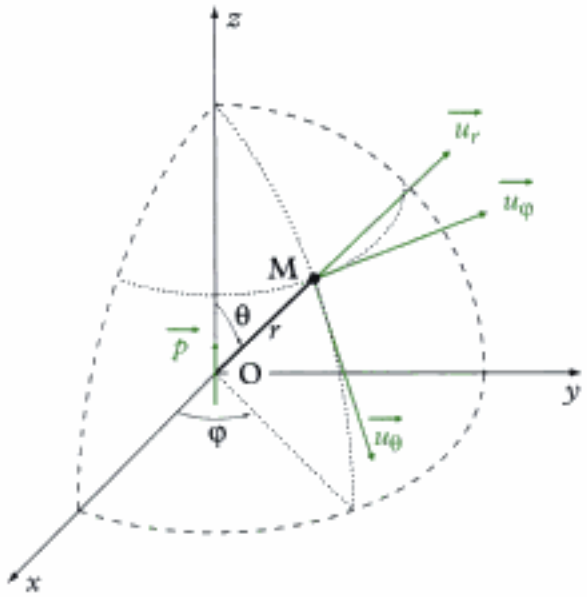
$$\boxed{a \ll \lambda \ll r}\,.$$

12. Cette approximation a déjà été vue dans le cours d'électromagnétisme de première année.

D.3. Expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Avec les hypothèses précédentes, les calculs des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ peuvent être menés à leur terme. On travaille dans un système de coordonnées sphériques, de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, bien adapté au problème (fig.7).

Copyrighted material



$\vec{u}_r$ colinéaire à (OM)
$\vec{u}_\theta$ tangent au méridien en M
$\vec{u}_\varphi$ tangent au parallèle en M

Fig. 7 - Coordonnées et base locale sphériques.

Au point M de coordonnées (r, θ, φ), les expressions exactes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont[13] :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\left(p(t-\dfrac{r}{c}) + \dfrac{r}{c}\dot{p}(t-\dfrac{r}{c})\right) \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sin\theta}{r^3}\left(p(t-\dfrac{r}{c}) + \dfrac{r}{c}\dot{p}(t-\dfrac{r}{c}) + \dfrac{r^2}{c^2}\ddot{p}(t-\dfrac{r}{c})\right) \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

et

$$\vec{B} = \begin{cases} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{r^2}\left(\dot{p}(t-\dfrac{r}{c}) + \dfrac{r}{c}\ddot{p}(t-\dfrac{r}{c})\right) \end{cases}$$

13. On admettra ces expressions générales sans détailler davantage les calculs. Le décalage temporel tient compte du temps nécessaire à l'onde pour parcourir à la célérité c la distance r qui sépare la source du point M.

Dans l'approximation de la zone de rayonnement ($\lambda \ll r$), les expressions des coordonnées des champs se simplifient. Pour cela, analysons chacun des termes entre parenthèses. En notant p_m l'amplitude du moment dipolaire et T la période des oscillations du dipôle[14], on peut écrire :

$$\frac{p(t-\frac{r}{c})}{\frac{r^2}{c^2}\ddot{p}(t-\frac{r}{c})} = \frac{p_m}{\frac{r^2}{c^2}\times\frac{p_m}{T^2}} = \frac{\lambda^2}{r^2} \ll 1 \text{ et } \frac{\frac{r}{c}\dot{p}(t-\frac{r}{c})}{\frac{r^2}{c^2}\ddot{p}(t-\frac{r}{c})} = \frac{\frac{r}{c}\times\frac{p_m}{T}}{\frac{r^2}{c^2}\times\frac{p_m}{T^2}} = \frac{\lambda}{r} \ll 1 .$$

14. La période T des oscillations est le temps caractéristique de variation du moment dipolaire.

Ainsi, dans l'approximation de la zone de rayonnement, les termes en $1/r$ sont prépondérants devant les autres. Les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ deviennent alors[15] :

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\times\dfrac{\sin\theta}{r}\ddot{p}(t-\dfrac{r}{c})\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi c}\times\dfrac{\sin\theta}{r}\ddot{p}(t-\dfrac{r}{c})\vec{u}_\varphi \end{cases}.$$

15. Pour le champ électrique, la contribution de la composante E_r à la norme de $\vec{E}$ est négligeable devant celle de la composante E_θ : on peut donc considérer en bonne approximation que $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{u}_\theta$.

Copyrighted material

D.4. Propriétés du champ rayonné

Au point M de coordonnées (r, θ, φ), les expressions précédentes montrent que le champ électrique $\vec{E}$ est polarisé suivant $\vec{u}_\theta$ et que le champ magnétique $\vec{B}$ est polarisé suivant $\vec{u}_\varphi$. Un calcul simple permet en outre d'établir que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_r)$ est direct. En effet :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}.$$

L'onde électromagnétique a donc localement la structure d'une onde plane. Il est important de bien comprendre que cette propriété n'est pas globale[16]. En effet :

– Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_r)$ dépend du point M considéré. On ne peut donc pas définir de direction de propagation pour l'onde.

– Le rayonnement est anisotrope du fait du terme en $\sin\theta$. L'amplitude de l'onde dépend de la direction de l'espace considérée.

– Le rayonnement s'atténue avec la distance du fait du terme en $1/r$. L'amplitude de l'onde dépend de la distance au dipôle.

16. L'onde étudiée est une onde sphérique localement assimilable à une onde plane.

Propriété 3

L'onde électromagnétique rayonnée par un dipôle oscillant a **localement la structure d'une onde plane.** Au point M de coordonnées (r, θ, φ), on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}.$$

D.5. Puissance rayonnée par le dipôle

D.5.1. Expression du vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à l'onde rayonnée a localement pour expression[17] :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \times \frac{\sin^2\theta}{r^2} \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}_r.$$

L'énergie électromagnétique se propage donc dans la direction du vecteur $\vec{u}_r$ et sa propagation est invariante par rotation autour de l'axe Oz[18]. L'anisotropie du rayonnement, que traduit la dépendance en $\sin^2\theta$, est visualisée par un **diagramme de rayonnement** (fig.8) : l'énergie rayonnée est maximale dans le plan équatorial, nulle suivant la direction du dipôle. On dit alors que l'émission est directive, le plan xOy perpendiculaire au dipôle étant privilégié.

17. Ce résultat est à rapprocher de la formule de Larmor pour une charge q accélérée. En posant $\ddot{p} = q\vec{a}$, où $\vec{a}$ désigne l'accélération de la charge mobile, on a en effet :

$$\Pi = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0} \times \frac{\sin^2\theta}{r^2} a^2.$$

18. Le moment dipolaire étant porté par l'axe Oz, le problème est logiquement invariant par rotation autour de cet axe. Concrètement, la coordonnée φ ne joue aucun rôle.

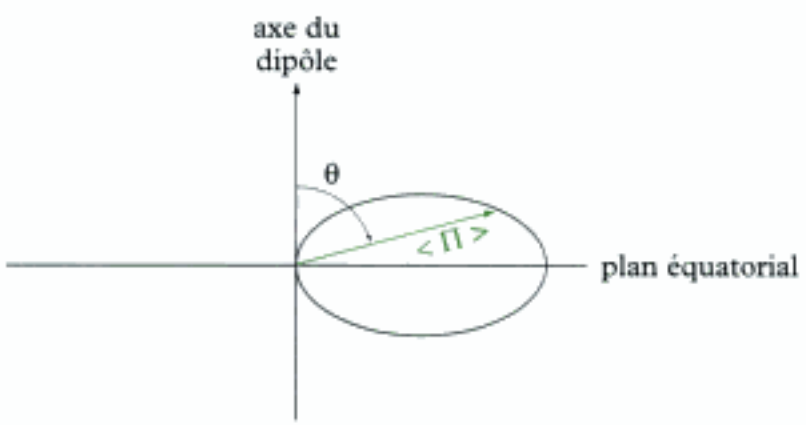


Fig. 8 - Diagramme de rayonnement du dipôle oscillant. Dans un plan passant par l'axe Oz du dipôle, on trace $\langle\Pi\rangle$ en coordonnées polaires pour une distance r fixée.

Copyrighted material

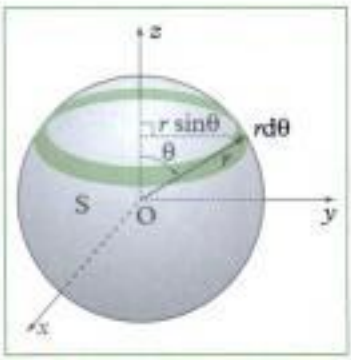


Fig. 9 - Intégration sur la sphère. On prend comme élément de surface une petite couronne.

19. Pour calculer l'intégrale, on pense à écrire :

$$\sin^3\theta = 1 - \cos^2\theta.$$

On obtient alors :

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}.$$

D.5.2. Puissance totale rayonnée

Soit S la sphère de centre O et de rayon r. La puissance électromagnétique rayonnée par le dipôle dans tout l'espace à la distance r de la source s'obtient en calculant le flux de $\vec{\Pi}$ à travers S :

$$P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S \Pi dS, \text{ avec } d\vec{S} = dS\vec{u}_r .$$

En coordonnées sphériques, comme la variable φ n'intervient pas dans l'expression de Π, on considère comme élément de surface une petite couronne de rayon $r\sin\theta$ et de largeur $r\,d\theta$ (fig. 9) :

$$P = \int_{\varphi=0}^{\theta=\pi} \underbrace{\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \times \frac{\sin^2\theta}{r^2} \ddot{p}^2}_{\Pi} \underbrace{2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta}_{dS} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$ [19].

En considérant que $p(t) = p_m \cos(\omega t)$, la puissance totale moyenne vaut :

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 p_m^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Cette expression ne dépend pas du rayon r de la sphère. La puissance totale moyenne reste constante au cours de la propagation de l'onde puisque celle-ci se propage depuis la source dans le vide, qui est un milieu non dissipatif. En revanche, la puissance surfacique moyenne, égale à $\langle \Pi \rangle$, décroît avec la distance en $1 / r^2$ puisque la puissance émise par la source se répartit sur une surface de plus en plus grande au cours de la propagation de l'onde.

E. Notions élémentaires sur la diffusion (filière PC)

E.1. Phénomène de diffusion

Lorsqu'une onde électromagnétique tombe sur des atomes ou des molécules, ceux-ci se mettent à osciller. Ces oscillations mettent en mouvement les charges constitutives de la matière qui, accélérées, se mettent à leur tour à rayonner comme des dipôles oscillants. On appelle **diffusion** cette réémission secondaire de l'onde.

On distingue trois types de diffusion d'ondes électromagnétiques par la matière, selon la taille a des obstacles devant la longueur d'onde λ de l'onde incidente.

- La *diffusion Rayleigh* correspond à la situation pour laquelle $a \ll \lambda$ (obstacles de petite taille). Elle peut être comprise par la théorie précédente.
- La *diffusion de Mie* correspond à la situation pour laquelle $a = \lambda$. La théorie sous-jacente est relativement complexe et hors programme.
- La diffusion qui correspond à la situation pour laquelle $a \gg \lambda$ (obstacles de grande taille) peut être comprise dans le cadre de l'optique géométrique.

E.2. Modèle de l'électron élastiquement lié

Pour comprendre la plupart des phénomènes observés lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu matériel, on peut adopter le modèle phénoménologique dit de «l'électron élastiquement lié». Dans les atomes constituant le milieu, on modélise chaque électron par un oscillateur linéaire amorti, les noyaux atomiques restant immobiles en raison de leur plus grande inertie.

Copyrighted material

• Chaque électron d'un atome est en effet soumis aux actions du noyau atomique et des autres électrons du cortège électronique, que l'on peut formaliser sous la forme d'une énergie potentielle d'interaction $E_{p,int}(\vec{r})$. Pour étudier le mouvement de l'électron, on prend en compte la force $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{p,int}$. Toutefois, au voisinage immédiat de la position d'équilibre stable de l'électron $\vec{r}_{eq}$, on peut se contenter d'une approximation à l'ordre deux de l'énergie potentielle d'interaction :

$$E_{p,int}(\vec{r}) = E_{p,int}(\vec{r}_{eq}) + \frac{E''_{p,int}(\vec{r}_{eq})}{2}(\vec{r} - \vec{r}_{eq})^2 .$$

Le terme correspondant à la dérivée première est nulle, car à l'équilibre $E'_{p,int}(\vec{r}_{eq}) = 0$. Comme l'équilibre est stable, $E''_{p,int}(\vec{r}_{eq}) > 0$, si bien que l'on peut poser : $E''_{p,int}(\vec{r}_{eq}) = K$. Le coefficient K joue alors le rôle d'une raideur comme le montre l'expression de la force de rappel :

$$\vec{F}(\vec{r}) \approx -K(\vec{r} - \vec{r}_{eq}) .$$

Dans la suite, on posera[20] : $K = m\omega_0^2$, où m est la masse de l'électron. De même, pour simplifier les expressions, on notera $\vec{r}$ l'écart à la position d'équilibre. Ainsi, la force de rappel s'écrit :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\omega_0^2\vec{r} .$$

• À cette force, il convient d'ajouter une force de frottements qui rend compte de manière phénoménologique des causes de l'amortissement du mouvement de l'électron. Ces causes peuvent être les chocs avec les autres électrons de l'atome, mais également les pertes d'énergie par rayonnement électromagnétique[21]. En effet, comme nous le verrons plus loin, toute particule chargée accélérée rayonne dans l'espace, donc perd de l'énergie. Pour de petits déplacements de l'électron, cette force de type frottements fluides peut s'écrire[22] :

$$\vec{F}_f(\vec{r}) \approx -m\frac{\omega_0}{Q}\vec{v} ,$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron et Q le facteur de qualité de l'oscillateur.

Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = -m\omega_0\vec{r} - m\frac{\omega_0}{Q}\vec{v} + \vec{F}_{ext} ,$$

où $\vec{a}$ désigne l'accélération de l'électron, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{F}_{ext}$ l'ensemble des forces extérieures.

E.3. Diffusion Rayleigh

E.3.1. Équation du mouvement de l'électron

Pour comprendre le phénomène de la diffusion Rayleigh, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Les électrons de la matière soumis à un champ électromagnétique extérieur sont écartés de leur position d'équilibre moyenne. Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, l'équation d'évolution des grandeurs dynamiques est linéaire. On peut donc se limiter à l'étude d'une OPPH, l'analyse de Fourier donnant la réponse de l'électron pour toute onde.

20. On peut vérifier l'homogénéité de cette formule. K s'exprime en N·m^{-1}, c'est-à-dire en kg·s^{-2}. Or m est en kg et ω_0 en rad·s^{-1} : le produit $m\omega_0^2$ est donc bien homogène à des kg·s^{-2}.

21. Les pertes d'énergie par rayonnement ne trouvaient pas d'explication satisfaisante dans le modèle planétaire classique de l'atome, car elles auraient dû logiquement aboutir à la chute de l'électron sur le noyau. La physique quantique a permis de lever cette difficulté.

22. En raison de sa simplicité – et parce qu'elle permet d'obtenir une équation différentielle linéaire –, cette expression est retenue pour rendre compte des phénomènes de dissipation. Elle est cependant contestable, mais ce point dépasse le cadre de l'ouvrage.

Copyrighted material

Chaque électron plongé dans le champ électromagnétique extérieur est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{ext} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).$$

Pour une OPPH, on sait que les valeurs des champs électrique et magnétique vérifient la relation : $E = cB$. Dans l'expression de la force de Lorentz, on peut donc comparer l'influence respective de chaque champ en calculant le rapport :

$$\frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} = \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1.$$

Ce rapport est très petit devant l'unité tant que l'électron n'est pas relativiste, hypothèse vérifiée dans les situations physiques courantes. On peut donc négliger l'influence du champ magnétique $\vec{B}$ devant celle du champ électrique $\vec{E}$[23]. En outre, pour des rayonnements dont la longueur d'onde λ est très supérieure aux dimensions de l'atome, le champ électrique de l'onde incidente peut être considéré comme pratiquement uniforme à l'échelle de l'atome. Seule sa dépendance temporelle intervient donc dans l'équation du mouvement de l'électron, que l'on peut alors écrire sous la forme :

23. On fait ici référence aux seuls champs de l'onde, pas à d'éventuels champs extérieurs pour lesquels une telle hypothèse n'est pas valable.

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}(t) - m\omega_0^2\vec{r} - m\frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}},$$

ou en ordonnant les termes :

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}(t)}.$$

E.3.2. Puissance rayonnée en régime permanent

L'équation du mouvement de l'électron précédemment établie est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Cette équation étant linéaire, on peut utiliser la représentation complexe pour déterminer la solution particulière harmonique correspondant au régime permanent (le régime transitoire étant supposé « éteint »). En notant le champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j\omega t}$ et en cherchant $\vec{r}$ sous la forme $\underline{\vec{r}}_m e^{j\omega t}$, on peut donc écrire[24] :

24. On rappelle que : $\vec{r} = \mathrm{Re}[\underline{\vec{r}}]$.

$$-\omega^2\underline{\vec{r}}_m + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{\vec{r}}_m + \omega_0^2\underline{\vec{r}}_m = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}_m,$$

d'où l'on déduit :

$$\underline{\vec{r}}_m = \frac{-\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}.$$

Le champ électrique $\vec{E}$ est ainsi à l'origine d'un moment dipolaire induit $\vec{p} = -e\vec{r}$ qui s'écrit en représentation complexe :

$$\underline{\vec{p}} = -e\underline{\vec{r}} = \frac{\frac{e^2}{m}\underline{\vec{E}}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}.$$

On reconnaît la représentation complexe d'un dipôle oscillant d'amplitude[25] :

25. On rappelle que l'amplitude réelle est donnée par le module de la représentation complexe.

$$p_m = |\underline{\vec{p}}| = \frac{\frac{e^2}{m}E_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}.$$

Copyrighted material

En introduisant le rapport $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (sans unité) et en posant $P_0 = \dfrac{e^4 E_m^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}$ (en W), on en déduit l'expression de la puissance totale moyenne rayonnée par ce dipôle (cf. § D.5)[26] :

$$\langle P \rangle = \frac{x^4}{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2} P_0 .$$

26. Le facteur de qualité Q et le rapport x étant sans unité, on vérifie facilement que P_0 est homogène à une puissance.

E.3.3. Explication de quelques phénomènes

La diffusion Rayleigh permet d'expliquer simplement la couleur bleue du ciel et celle du Soleil couchant. L'expérience montre en effet que la pulsation ω_0 prend des valeurs dans le domaine des ultraviolets[27]. Si l'on s'intéresse au rayonnement incident visible (de pulsation ω) tombant sur l'atmosphère, on a donc $\omega \ll \omega_0$. De même, on peut montrer que le facteur de qualité Q est élevé, de sorte que la puissance totale moyenne rayonnée prend la forme :

$$\langle P \rangle \approx x^4 P_0 = \frac{\omega^4}{\omega_0^4} P_0 .$$

27. On a typiquement ω_0 de l'ordre de 10^{16} rad·s^{-1} et Q de l'ordre de 10^8.

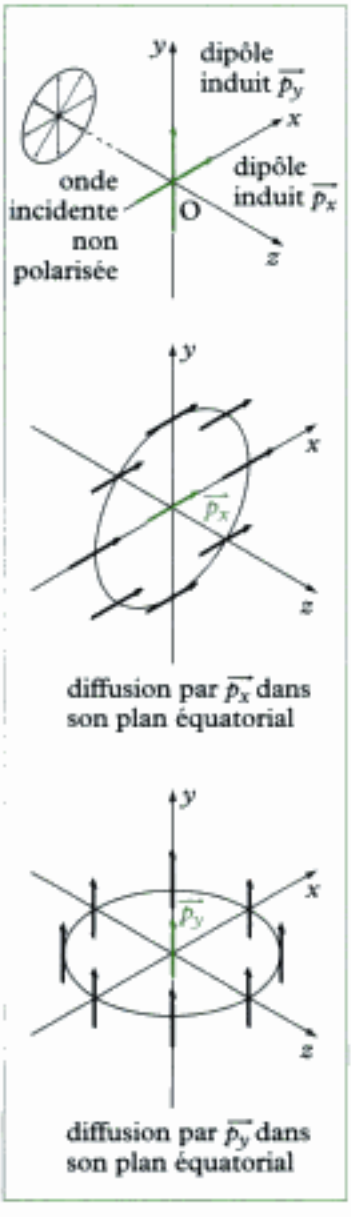


Fig. 10 - Polarisation par diffusion.

• La puissance diffusée est donc proportionnelle à ω^4. Les rayonnements situés dans le violet sont donc beaucoup plus fortement diffusés que les rayonnements situés dans le rouge. Ce phénomène permet en particulier d'expliquer la couleur du Soleil couchant. Au crépuscule, la couche d'atmosphère traversée étant importante, le rayonnement incident est largement diffusé, et par conséquent très appauvri en violet et en bleu : seul le rouge atteint donc l'observateur.

• La couleur bleue du ciel s'explique également par la diffusion Rayleigh. L'atmosphère, constituée de molécules en suspension, absorbe une partie du rayonnement visible situé dans le violet, alors que les longueurs d'onde plus élevées traversent le milieu. Le bleu, de longueur d'onde plus faible, est alors plus fortement diffusé que les autres couleurs transmises. Ce phénomène, associé aux propriétés particulières des capteurs de couleur qui tapissent le fond de l'œil (appelés cônes), permet d'expliquer la teinte bleue du ciel. Bien évidemment, l'effet n'est notable que si une épaisseur suffisante d'atmosphère est traversée par le rayonnement incident pour être effectivement diffusé !

E.4. Polarisation par diffusion

La lumière naturelle (par exemple, la lumière solaire) n'est pas polarisée, car elle résulte de l'émission aléatoire de rayonnement par les atomes des sources. Cependant, toute lumière, même non polarisée, peut être décrite comme la superposition de deux ondes lumineuses de polarisation rectiligne.

Pour illustrer ce propos, considérons une onde non polarisée se propageant dans la direction Oz. Si un atome ou une molécule est situé au point O, il joue le rôle de centre diffuseur. Plus précisément, l'onde incidente induit un moment dipolaire qui admet deux composantes $\vec{p}_x$ et $\vec{p}_y$ associées aux deux polarisations de l'onde. Chacun de ces deux dipôles se comporte à son tour comme une source de rayonnement qui émet principalement dans son plan équatorial (cf. § D.5.1). Ainsi, l'onde réémise par l'atome ou la molécule présente une polarisation rectiligne dans deux directions d'observation privilégiées (fig.10) : ce phénomène s'appelle **la polarisation par diffusion**.

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Équation d'ondes

• Dans le vide, les **équations de Maxwell** définissant le champ électrique $\vec{E}$ (en $V \cdot m^{-1}$) et le champ magnétique $\vec{B}$ (en T) s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{div}\vec{E} = 0 \\ \text{(ii)} & \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} & \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} & \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

ε_0 désigne la permittivité du vide (en $F \cdot m^{-1}$) et μ_0 la perméabilité du vide (en $H \cdot m^{-1}$).

• Les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont chacun solution d'une **équation de d'Alembert** que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

La constante $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ est la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide.

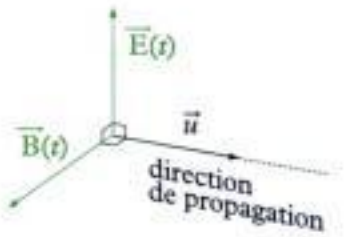
✓ Solutions en OPPH

• En représentation complexe, les champs associés à une OPPH de pulsation ω en propagation selon la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \underline{\vec{B}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{B}}_m e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}, \text{ avec } \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u} \text{ vecteur d'onde.}$$

• Les ondes électromagnétiques planes progressives sont **transversales**. Pour une OPPH, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ vérifient en outre :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad ((\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}) \text{ trièdre direct}).$$



• Dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ décrit au cours du temps :

– dans le cas général où $E_{m,x} \neq E_{m,y}$ et $\phi \neq 0$ ou π, une ellipse (**polarisation elliptique** gauche ou droite) ;

– dans le cas particulier où $E_{m,x} = E_{m,y}$ et $\phi = \pm \dfrac{\pi}{2}$, un cercle (**polarisation circulaire** gauche ou droite) ;

– dans le cas particulier où $E_{m,x} \neq E_{m,y}$ et $\phi = 0$ ou π, un segment de droite (**polarisation rectiligne**).

Copyrighted material

• Pour une OPPH, les valeurs moyennes du **vecteur de Poynting** et de la **densité volumique d'énergie** s'écrivent :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \langle e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} = \frac{B_m^2}{2\mu_0}.$$

La vitesse de propagation de l'énergie est **égale** à la vitesse de propagation c de l'onde.

✓ Rayonnement du dipôle oscillant (filière PC)

• Deux charges électriques opposées $-q$ et q et situées respectivement aux points N et P dans l'espace forment un dipôle électrique caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}.$$

Si le dipôle varie avec le temps, il est la source d'un champ électromagnétique rayonné dans tout l'espace.

• On considère un **dipôle oscillant**, situé à l'origine O d'un système d'axes, dont le moment dipolaire $\vec{p}(t)$, de direction fixe Oz dans l'espace, varie de manière sinusoïdale avec le temps :

$$\vec{p}(t) = p_m \cos(\omega t)\vec{u}_z.$$

– Pour étudier le champ rayonné, on se place dans la **zone de rayonnement** du dipôle :

$$a \ll \lambda \ll r,$$

où a est la taille caractéristique du dipôle, λ la longueur d'onde et r la distance au point O.

– En **coordonnées sphériques**, les expressions approchées des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont :

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \dfrac{\sin\theta}{r} \ddot{p}(t - \dfrac{r}{c})\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi c} \times \dfrac{\sin\theta}{r} \ddot{p}(t - \dfrac{r}{c})\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

L'onde électromagnétique rayonnée par un dipôle oscillant a **localement la structure d'une onde plane**. Au point M de coordonnées (r, θ, φ), on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}.$$

– L'énergie électromagnétique se propage dans la direction du vecteur $\vec{u}_r$ et sa propagation est invariante par rotation autour de l'axe Oz : l'énergie rayonnée est maximale dans le plan équatorial, nulle suivant la direction du dipôle.

✓ Modèle de l'électron élastiquement lié

Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\frac{\omega_0}{Q}\vec{v} + \vec{F}_{ext},$$

où $\vec{a}$ désigne l'accélération de l'électron, $\vec{v}$ sa vitesse et $\vec{F}_{ext}$ l'ensemble des forces extérieures.

Copyright Vuibert Matériel

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment exploiter les équations de Maxwell en représentation complexe ?

On considère une OPPH électromagnétique de pulsation ω se propageant suivant la direction Oz.

→ Savoir faire

❶ Écrire les équations de Maxwell dans le vide, en représentation réelle. Les opérations de dérivations spatiales et temporelles étant linéaires, ces équations prennent la même forme en représentation complexe.

❷ Dans les équations précédentes, remplacer $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$, et utiliser les relations :

$$\text{div}\ \underline{\vec{X}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{X}},\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{X}} = -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{X}}\ \text{et}\ \frac{\partial\underline{\vec{X}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{X}}$$

valables pour une OPPH afin d'obtenir quatre équations simplifiées en représentation complexe.

❸ Déduire des deux équations comportant un produit scalaire que l'onde est transversale. Déduire des deux équations comportant un produit vectoriel que le triplet $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ forme un trièdre direct.

❹ Calculer $\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}})$ en combinant les deux équations comportant un produit vectoriel pour obtenir la relation de dispersion.

→ Application

Le champ électrique associé à une OPPH électromagnétique en propagation dans le vide suivant la direction Oz a pour expression :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_m\cos(\omega t - kz).$$

Montrer que l'onde est transversale, puis déterminer l'expression de $\vec{B}(z,t)$. Donner la relation de dispersion.

Solution

❶ Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \text{div}\,\vec{E} = 0 \\ \text{(ii)} & \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} & \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} & \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Copyrighted material

❷ Soit en représentation complexe, avec $\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j(\omega t - kz)}$:

$$\begin{cases} \text{(i)} & -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{(ii)} & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \\ \text{(iii)} & -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{(iv)} & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0 j\omega\underline{\vec{E}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \text{(i)} & \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{(ii)} & \underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \\ \text{(iii)} & \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{(iv)} & \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}}{\varepsilon_0\mu_0\omega} \end{cases}}$$

❸ D'après les équations (i) et (iii) : $\vec{k} \perp \vec{E}$ et $\vec{k} \perp \vec{B}$, donc l'onde est **transversale**.

D'après l'équation (ii), $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ forme un **trièdre direct** et :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}_m}{\omega}\cos(\omega t - kz)}.$$

❹ On a par ailleurs :

$$\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}) = (\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}})\vec{k} - \vec{k}^2\underline{\vec{E}}$$
$$= \overbrace{0 \text{ d'après (i)}}$$

$$\text{et } \vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}) = \underset{\text{d'après (ii)}}{\omega\,\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}} = \underset{\text{d'après (iv)}}{-\varepsilon_0\mu_0\omega^2\underline{\vec{E}}}$$

D'où on en déduit : $k^2\underline{\vec{E}} = \varepsilon_0\mu_0\omega^2\underline{\vec{E}}$, soit la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}, \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Le calcul de $\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{E})$ en représentation complexe est équivalent au calcul de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ en représentation réelle.

Méthode n°2

Comment transformer l'état de polarisation d'une OPPH ?

Pour obtenir une lumière polarisée, on utilise des dispositifs comme des polariseurs et des lames à retard. On considère une OPPH se propageant dans le sens des z croissants.

→ Savoir faire

❶ Un **polariseur** ne laisse passer que les champs électriques dont la polarisation prend une direction particulière (axe de polarisation). De manière générale, si un polariseur, d'axe de polarisation de vecteur unitaire $\vec{u}$, est placé perpendiculairement à l'axe Oz de propagation de l'onde, le champ électrique transmis est donné par :

$$\underline{\vec{E}}' = (\underline{\vec{E}}\cdot\vec{u})\,\vec{u}.$$

❷ Une **lame à retard de phase** est un milieu qui introduit un déphasage φ entre les composantes du champ électrique. De manière générale, si la lame est placée perpendiculairement à l'axe Oz de propagation de l'onde, le champ électrique transmis est donné par :

$$\underline{\vec{E}}' = \underline{E}_x\vec{u}_x + \underline{E}_y e^{j\varphi}\vec{u}_y,$$

avec $\varphi = k\delta$, δ étant une différence de marche qui dépend de la lame.

Copyrighted material

→ Application

Une OPPH polarisée rectilignement se propage dans la direction Oz. Son champ électrique $\vec{E}$, en représentation complexe, s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(z, t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j(\omega t - kz)},$$

avec : $\underline{\vec{E}}_m = \underline{E}_x \vec{u}_x + \underline{E}_y \vec{u}_y$ et $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1) On place un polariseur perpendiculairement à l'axe Oz de propagation de l'onde. Son axe de polarisation définit l'axe Ox.

a. Que devient le champ $\underline{\vec{E}}$ après traversée du polariseur ?

b. Un second polariseur est placé sur le trajet de l'onde de sorte que son axe de polarisation fasse un angle α, dans le sens trigonométrique, avec celui du premier polariseur. Quel est le nouveau champ électrique après traversée de ce second polariseur ?

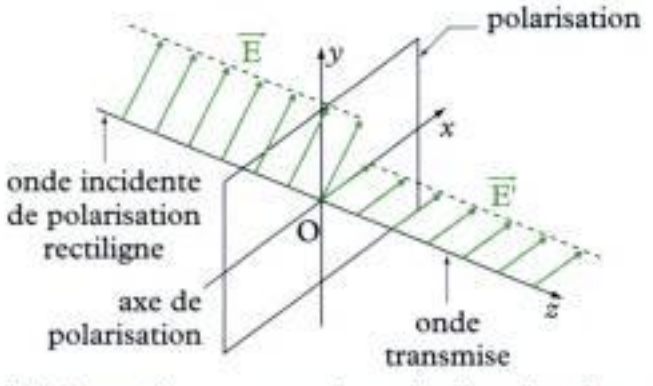
2) On place une lame à retard perpendiculairement à l'axe Oz de propagation de l'onde.

a. Une lame est dite demi-onde si $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$, $\lambda = \dfrac{c}{2\pi\omega}$ étant fixée. Que devient l'onde initiale de champ $\vec{E}$ après traversée d'une telle lame ?

b. Une lame est dite quart-d'onde si $\delta = \dfrac{\lambda}{4}$. Que devient l'onde initiale après traversée d'une telle lame si en outre $\underline{E}_x = \underline{E}_y$?

Solution

1) a. Commençons par illustrer la situation :



L'onde incidente est polarisée rectilignement suivant la direction du vecteur $\underline{\vec{E}}_m$. Ce vecteur se décompose dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. L'axe de polarisation du polariseur est l'axe Ox. Seule la composante $\underline{E}_x$ de l'onde est donc transmise. Par conséquent, après traversée du polariseur, le champ s'écrit :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}' = \underline{E}_x e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x}$$

b. On a :

$$\underline{\vec{E}} \xrightarrow[(\text{axe } \vec{u}_x)]{\text{Polariseur 1}} \underline{\vec{E}}' \xrightarrow[(\text{axe } \vec{u})]{\text{Polariseur 2}} \underline{\vec{E}}''$$

D'où :

$$\underline{\vec{E}}' = (\underline{\vec{E}} \cdot \vec{u}_x)\, \vec{u}_x \text{ et } \underline{\vec{E}}'' = (\underline{\vec{E}}' \cdot \vec{u})\, \vec{u}$$

avec :

$$\vec{u} = \cos\alpha\ \vec{u}_x + \sin\alpha\ \vec{u}_y.$$

Copyrighted material

Ainsi, on trouve :

$$\underline{\vec{E}}'' = \underline{E}_x \cos\alpha \, e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}$$

2) ⚠ Une lame n'est demi-onde ou quart-d'onde que pour une longueur d'onde donnée car δ est fixée.

a. Avec $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$ (lame demi-onde), le déphasage introduit par la lame est :

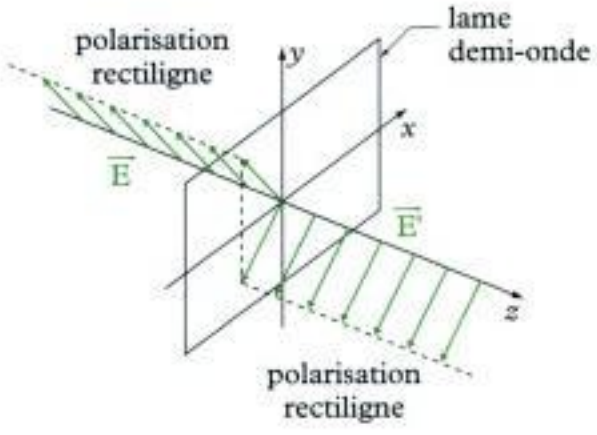
$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta, \text{ soit : } \varphi = \pi.$$

Avec le champ $\underline{\vec{E}}$ avant traversée de la lame, le champ $\underline{\vec{E}}'$ après traversée est :

$$\underline{\vec{E}}' = (\underline{E}_x \vec{u}_x + \underline{E}_y e^{j\pi} \vec{u}_y) e^{j(\omega t - kz)}$$

soit :

$$\underline{\vec{E}}' = (\underline{E}_x \vec{u}_x - \underline{E}_y \vec{u}_y) e^{j(\omega t - kz)}$$



L'onde reste polarisée rectilignement, mais sa polarisation a changé puisque :

$$\underline{E}_x \rightarrow \underline{E}_x$$
$$\underline{E}_y \rightarrow -\underline{E}_y$$

La polarisation est symétrique de la polarisation initiale par rapport à l'axe Ox.

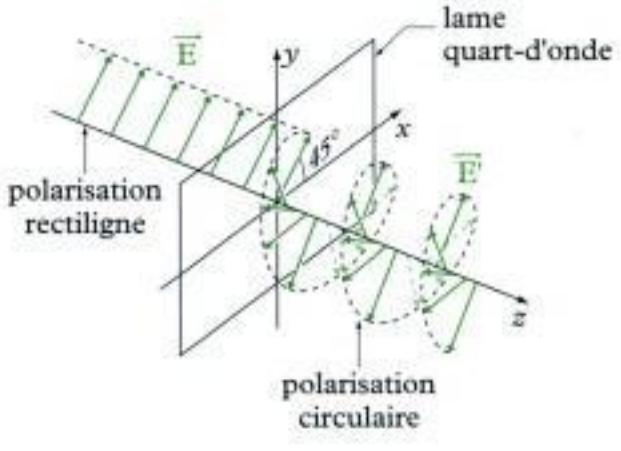
b. Avec $\delta = \dfrac{\lambda}{4}$ (lame quart-d'onde), le déphase vaut $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. D'où le champ électrique $\underline{\vec{E}}'$ transmis :

$$\underline{\vec{E}}' = (\underline{E}_x \vec{u}_x + \underline{E}_y e^{j\frac{\pi}{2}} \vec{u}_y) e^{j(\omega t - kz)}$$

Si de plus $\underline{E}_x = \underline{E}_y$, on peut écrire :

$$\underline{E}'_y = e^{j\frac{\pi}{2}} \underline{E}'_x, \text{ avec } \underline{E}'_x = \underline{E}_x.$$

Cette dernière relation montre que l'onde transmise est polarisée **circulaire gauche**. Ainsi, la lame quart-d'onde a transformé une onde polarisée rectilignement, dont la polarisation fait un angle de 45° avec l'axe Oz, en une onde polarisée circulaire gauche.



Copyright

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Propagation dans un guide d'onde

1) Rappeler comment on trouve l'équation de propagation du champ électrique à partir des équations de Maxwell dans le vide. On notera c la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide.

2) Dans un guide d'ondes de section rectangulaire, les composantes E_x, E_y, E_z du champ électrique $\vec{E}$ s'écrivent :

$$E_x = E_{m,x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_{m,x} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$E_z = 0$$

a. Vérifier que le champ électrique satisfait une équation de d'Alembert si la pulsation ω et le vecteur d'onde k sont liés par la relation :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}.$$

b. Préciser, quand il y a propagation, sa direction et son sens.

Ex. 2 Composition de deux ondes

On considère deux OPPH qui se propagent dans le vide à la vitesse c, dont les champs électriques sont respectivement :

$$\vec{E}(z, t) = E_m \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x$$

et :

$$E'(z, t) = E'_m \cos(\omega t - kz - \varphi)\, \vec{u}_y$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

1) Vérifier que $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ sont solutions d'une équation de d'Alembert.

2) Préciser brièvement les caractéristiques de ces ondes.

3) Montrer que l'extrémité du vecteur $\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}'$ décrit au cours du temps, dans un plan z = cste, une ellipse. Préciser le sens de parcours de l'ellipse avec le temps.

4) Étudier la polarisation de l'onde suivant les valeurs de φ.

5) Préciser, sans calcul, l'état de polarisation de l'onde résultant de la composition des ondes suivantes :

a. $\vec{E}(z, t) = E_m \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x$

et $\vec{E}'(z, t) = -E'_m \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_y$.

b. $\vec{E}(z, t) = E_m \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x$

et $\vec{E}'(z, t) = -E'_m \sin(\omega t - kz)\, \vec{u}_y$.

Ex. 3 Aspects énergétiques

1) Les champs électrique et magnétique d'une onde se propageant dans le vide à la vitesse c sont donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kz) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - kz).$$

a. Préciser la nature de l'onde et la relation qui existe entre $\vec{E}_m$ et $\vec{B}_m$.

b. Exprimer les densités volumiques d'énergie électrique e_e et magnétique e_m. En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique e, puis sa valeur moyenne temporelle $< e >$.

c. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Quelle puissance instantanée traverse une surface S perpendiculaire à la direction de propagation ? Quelle est la puissance moyenne associée ?

d. Vérifier que :

$$\text{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0.$$

2) Les champs électrique et magnétique d'une onde se propageant dans le vide à la vitesse c sont donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(kz)\cos(\omega t)$$

et :

$$\vec{B} = \vec{B}_m \sin(kz)\sin(\omega t).$$

a. Préciser la nature de l'onde et la relation qui existe entre $\vec{E}_m$ et $\vec{B}_m$.

b. Exprimer les densités volumiques d'énergie électrique e_e et magnétique e_m. Y a-t-il équipartition de l'énergie ?

c. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Quelle est la puissance moyenne qui traverse une surface S perpendiculaire à la direction de propagation ? Conclure.

d. Vérifier que :

$$\text{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

On rappelle la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\,\vec{V}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}.$$

Copyrighted material

Niveau 2

Ex. 4 Représentation de Jones de l'état de polarisation

L'état de polarisation d'une OPPH, se propageant dans le sens des z croissants, est entièrement décrit par la donnée des deux composantes du champ électrique dans le plan xOy. Cet état peut être représenté par un vecteur à deux dimensions, appelé « vecteur de Jones » (inventé en 1941 par le physicien américain Robert Clark-Jones), dont les composantes sont proportionnelles aux amplitudes complexes des composantes du champ électrique. Le vecteur de Jones $\vec{J}$ associé au champ électrique :

$$\vec{E} = E_{0x}\, e^{j(\omega t-\varphi_x)}\, \vec{u}_x + E_{0y}\, e^{j(\omega t-\varphi_y)}\, \vec{u}_y$$

s'écrit : $$\vec{J} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \end{bmatrix}.$$

1) Quelle est la signification physique de :

$$J^2 = \| \vec{J} \|^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \ ?$$

En notation complexes, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule selon la formule suivante :

$$\underline{\vec{a}} \cdot \underline{\vec{b}} = a_x b_x^* + a_y b_y^* + a_z b_z^*,$$

où $\underline{z}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{z}$.

2) On associe à $\vec{J}$ le vecteur de Jones normé :

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{bmatrix} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \end{bmatrix}.$$

a. Quel état de polarisation représentent les vecteurs suivants :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\quad \hat{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \text{ et } \hat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} ?$$

b. Comment s'écrit le vecteur de Jones normé d'une onde polarisée elliptiquement droite dont les axes sont Ox et Oy ?

c. On considère l'état de polarisation défini par le vecteur de Jones :

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{G} - \hat{D}).$$

Quelle est sa polarisation ? Que peut-on en conclure ?

4) Montrer que toute OPPH peut s'interpréter à la fois :

a. comme la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement suivant deux directions orthogonales ;

b. comme la superposition de deux OPPH polarisées circulairement, l'une droite, l'autre gauche.

Ex. 5 Rayonnement d'une antenne

1) Un fil rectiligne d'axe Oz, de longueur $\delta z << \lambda$, de milieu O est parcouru par un courant d'intensité : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ variable, I_0 étant une constante.

a. Montrer qu'un tel circuit est équivalent à un dipôle oscillant de moment dipolaire $\delta\vec{p}$.

b. En déduire que : $\delta\vec{p} = \left(\frac{di}{dt}\right) \delta z \vec{u}_z$.

2) Une antenne est constituée d'un fil rectiligne d'axe Oz, de longueur a, de milieu O, origine d'un repère d'espace. Cette antenne, parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I(z) \cos(\omega t)$ qui varie à la fois dans le temps et dans l'espace, rayonne un champ électromagnétique dans tout l'espace. Ce champ n'est cependant pas celui d'un dipôle car l'hypothèse $a << \lambda$ n'est plus satisfaite. Seul reste valable l'approximation $a << r$.

a. On décompose l'antenne en éléments de longueur dz tels que l'approximation $dz << \lambda$ soit valable. Exprimer le champ électrique élémentaire $d\vec{E}(P, M, t)$ créé en un point M de l'espace par un élément dz d'antenne situé au point P de cote z.

b. Que devient cette expression dans l'approximation de champ lointain ?

c. Une antenne est dite demi-onde si $a = \frac{\lambda}{2}$. On donne :

$$I(z) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right).$$

Montrer que le champ électrique rayonné par une telle antenne s'écrit :

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 e} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \times \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \vec{u}_\theta.$$

d. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ rayonné par l'antenne.

e. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et sa valeur moyenne temporelle $< \vec{\Pi} >$.

f. Calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne.

3) La résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde est la grandeur R_r définie par : $P = \frac{R_r I_0^2}{2}$, où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de l'antenne.
Déterminer R_r pour une antenne demi-onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numérique R_r.

4) Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est P = 2 MW ?
On rappelle l'expression du champ électrique dipolaire :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{\sin\theta}{r} \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{u}_\theta$$

et on donne :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(ax)\, dx = \frac{2}{1-a^2} \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = 1{,}22$$

Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{E} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

En utilisant la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

on obtient, d'une part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$$

et d'autre part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = -\mu_0\ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad .$$

$\Delta\vec{E}$ désigne le laplacien du vecteur $\vec{E}$ qui s'écrit dans une base cartésienne :

$$\Delta\vec{E} = \Delta E_x \vec{u}_x + \Delta E_y \vec{u}_y + \Delta E_z \vec{u}_z \ .$$

D'où :

$$-\Delta\vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta\vec{E} = \vec{0}}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \ .$$

De la même façon, en exprimant $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})$ de deux façons, on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta\vec{B} = \vec{0}}$$

2) a. Avec le champ électrique proposé, on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_y &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{a^2} E_x - \frac{\pi^2}{b^2} E_x - k^2 E_x \\ &= -\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) E_x \end{aligned}$$

Copyrighted material

puis :

$$\Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$
$$= -\frac{\pi^2}{a^2} E_y - \frac{\pi^2}{b^2} E_y - k^2 E_y$$
$$= -\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) E_y$$

et :

$$\Delta E_z = 0 .$$

Finalement :

$$\Delta \vec{E} = -\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) (E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z)$$

soit :

$$\Delta \vec{E} = -\left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \vec{E} .$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \vec{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \vec{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \vec{u}_z$$
$$= -\omega^2 E_x \vec{u}_x - \omega^2 E_y \vec{u}_y$$
$$= -\omega^2 \vec{E}$$

Finalement, on a :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \left[c^2 (k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}) - \omega^2 \right] \vec{E} .$$

$\vec{E}$ est donc solution d'une équation de d'Alembert si :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$$

La relation qui existe entre la pulsation ω de l'onde et son vecteur d'onde k est appelée relation de dispersion. Dans le cours, nous avons rencontré la relation $k = \frac{\omega}{c}$ qui traduit l'absence de dispersion dans le milieu de propagation. Nous rencontrons ici une relation de dispersion plus complexe. Le chapitre 4 est consacré au phénomène de dispersion et donne un sens physique à la relation.

b. Pour qu'il y ait propagation, il doit exister un couplage entre les coordonnées spatiales et le temps. Un tel couplage est présent dans le terme en $\cos(\omega t - kz)$ qui traduit la propagation de l'onde le long de l'axe Oz.

Les termes en $\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ ne font intervenir que les coordonnées x et y indépendamment du temps. Ils sont associés à une évolution de l'amplitude au point d'abscisse x ou d'ordonnée y, quel que soit l'instant t.

L'onde se propage donc uniquement **le long de l'axe *Oz* dans le sens des *z* croissants**.

Copyright Material

Exercice 2

1) Vérifions que $\vec{E}$ est la solution d'une équation de d'Alembert. On a :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \cos(\omega t - kz)\vec{u}_z, \text{ soit : } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}.$$

De même, on a :

$$\Delta\vec{E} = \Delta E_x \vec{u}_x + \underbrace{\Delta E_y}_{=0} \vec{u}_y + \underbrace{\Delta E_z}_{=0} \vec{u}_z = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\vec{u}_x, \text{ soit : } \Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}.$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\vec{E} = (k^2c^2 - \omega^2)\vec{E} = \vec{0}, \text{ car } \omega = kc.$$

Donc $\vec{E}$, et de la même façon, $\vec{E}'$ sont solutions d'une **équation de d'Alembert**.

2) • Le champ $\vec{E}$ est celui d'une **onde plane progressive harmonique**, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$, avec $k = \frac{\omega}{c}$. Cette onde se propage suivant *Oz* dans **le sens des *z* croissants**. Elle est polarisée rectilignement de direction de polarisation **l'axe *Ox***.

• Le champ $\vec{E}'$ est celui d'une **OPPH**, de même pulsation ω, de même vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Sa propagation se fait suivant *Oz* dans **le sens des *z* croissants**. Elle est polarisée rectilignement de direction de polarisation **l'axe *Oy***. Cette onde est déphasée par rapport à la précédente d'un **déphasage φ**.

3) Pour déterminer l'équation cartésienne de l'extrémité du vecteur $\vec{E}_T$ dans un plan z = cte, on cherche à éliminer φ.

• Notons $\vec{E}_T$ la somme $\vec{E}$ + $\vec{E}'$. On a :

$$\vec{E}_T = \underbrace{E_m \cos\phi}_{E_x}\vec{u}_x + \underbrace{E'_m \cos(\phi - \varphi)}_{E_y}\vec{u}_y$$

en posant :

$$\phi = \omega t - kz.$$

On a alors :

$$\cos\phi = \frac{E_x}{E_m},$$

puis $\cos^2\phi = \left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2$, $\sin^2\phi = 1 - \left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2$.

D'autre part :

$$\cos(\phi - \varphi) = \frac{E_y}{E'_m}$$

puis :

$$\cos\phi\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi = \frac{E_y}{E'_m}$$

Copyrighted material

d'où :

$$\sin\phi\sin\varphi = \left(\frac{E_y}{E'_m}\right) - \cos\phi\cos\varphi$$

puis :

$$\sin^2\phi\sin^2\varphi = \left(\frac{E_y}{E'_m}\right)^2 + \cos^2\phi\cos^2\varphi - 2\left(\frac{E_y}{E'_m}\right)\cos\phi\cos\varphi.$$

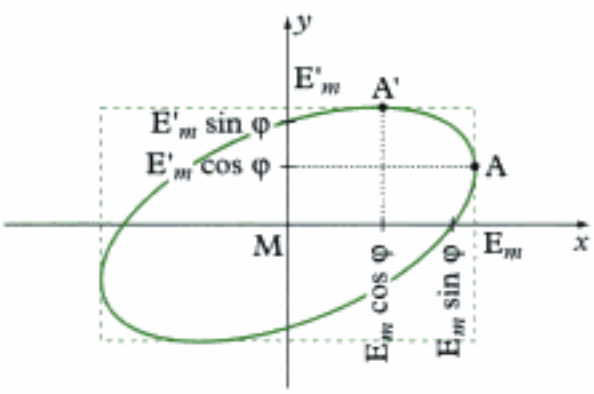
On peut à présent déterminer l'équation cartésienne de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}_T$, de composantes E_x et E_y. En éliminant ϕ entre les équations, on a :

$$\left[1-\left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2\right]\sin^2\varphi = \left(\frac{E_y}{E'_m}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2\cos^2\varphi - 2\left(\frac{E_x}{E_m}\right)\left(\frac{E_y}{E'_m}\right)\cos\varphi \ .$$

Après simplification, il reste :

$$\left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E'_m}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_m}\right)\left(\frac{E_y}{E'_m}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

• Il s'agit de l'équation cartésienne **d'une ellipse** dont les axes principaux sont inclinés par rapport aux axes M*x* et M*y*, M étant l'origine du vecteur $\vec{E}_T$ à l'instant *t*, sur l'axe *Oz*.



L'extrémité du vecteur $\vec{E}_T$ décrit une ellipse inscrite dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes M*x* et M*y*, de longueurs $2E_m$ et $2E'_m$.

• Pour connaître le sens de parcours de l'ellipse, il faut déterminer la vitesse de l'extrémité de $\vec{E}_T$. On a :

$$\left(\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t}\right)(z,t) = -\omega E_m\sin\phi\ \vec{u}_x - \omega E'_m\sin(\phi-\varphi)\ \vec{u}_y \ .$$

Pour *z* fixé, à l'instant t_0 tel que $\omega t_0 = kz + \varphi$, on a :

$$\left(\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t}\right)(z,t_0) = -\omega E_m\sin\varphi\ \vec{u}_x \ .$$

Copyrighted material

En outre :

$$\vec{E}_T(z, t_0) = E_m \cos\varphi \, \vec{u}_x + E'_m \, \vec{u}_y .$$

L'extrémité de $\vec{E}_T$ est par conséquent au point A', et sa vitesse est colinéaire à $\vec{u}_x$, de sens contraire si $\sin\varphi \geqslant 0$, de même sens si $\sin\varphi \leqslant 0$.

Finalement :

– **si $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$**, puisque $\sin\varphi \geqslant 0$, la polarisation est **elliptique gauche** ;

– **si $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$**, puisque $\sin\varphi \leqslant 0$, la polarisation est **elliptique droite**.

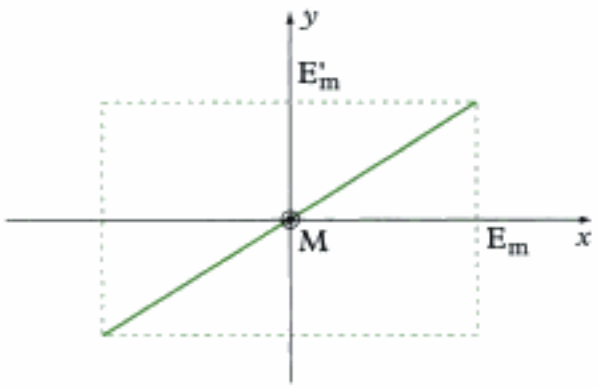
4) Dans le cas général, la polarisation est dite elliptique. Pour certaines valeurs de φ, et également de E_m et E'_m, elle peut être rectiligne ou circulaire.

• Si $\varphi = 0$, à π près, l'équation cartésienne précédente devient :

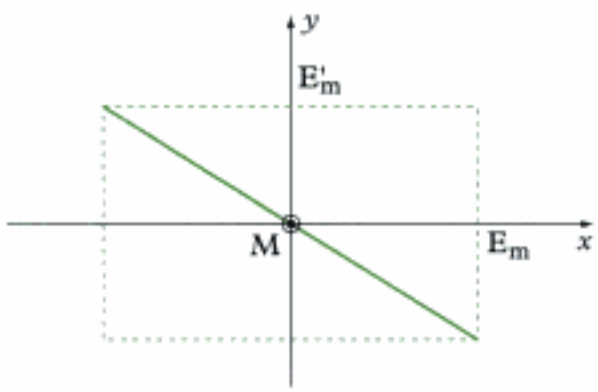
$$\left(\frac{E_x}{E_m} \pm \frac{E_y}{E'_m} \right)^2 = 0 , \quad \text{d'où : } E_y = \pm \frac{E'_m}{E_m} E_x .$$

Il s'agit d'une polarisation rectiligne.

– Si $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$, on a : $E_y = \dfrac{E'_m}{E_m} E_x$.



– Si $\varphi = \pi \pmod{2\pi}$, on a : $E_y = -\dfrac{E'_m}{E_m} E_x$.



Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

L'équation de Maxwell donne alors :

$$\boxed{\vec{B}_m = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_m}{\omega}}$$

L'onde étant transversale, $(\vec{E}_m, \vec{B}_m, \vec{k})$ forme un trièdre direct.

b. La densité volumique d'énergie électrique est :

$$e_e = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{e_e = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} \cos^2(\omega t - kz)}.$$

– La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$e_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}, \quad \text{soit} \quad \boxed{e_m = \frac{B_m^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)}.$$

– La relation $\vec{B}_m = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_m}{\omega}$ donne :

$$B_m^2 = \vec{B}_m^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\vec{k} \wedge \vec{E}_m\right)^2 = \frac{k^2}{\omega^2} = \left(\frac{E_m}{c}\right)^2.$$

En effet, $\vec{k}$ et $\vec{E}_m$ étant orthogonaux : $\|\vec{k} \wedge \vec{E}_m\| = \|\vec{k}\| \, \|\vec{E}_m\|$.

Il vient donc :

$$e_m = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kz) = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2} \cos^2(\omega t - kz).$$

Donc : $e_m = e_e$. Il y a équipartition de l'énergie électromagnétique $e = e_e + e_m$ puisque :

$$e_e = \frac{e}{2} \quad \text{et} \quad e_m = \frac{e}{2}.$$

Ce résultat est toujours vrai pour une OPPH (cf. cours § C.1.2).

On a donc :

$$\boxed{e = \varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kz)}.$$

Sa valeur moyenne temporelle vaut :

$$\langle e \rangle = \varepsilon_0 E_m^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle}_{\frac{1}{2}} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\langle e \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2}}$$

c. • Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Copyrighted material

On a ici :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_m \wedge \vec{B}_m}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kz).$$

Avec la relation donnant $\vec{B}_m$ en fonction de $\vec{E}_m$, on obtient :

$$\vec{E}_m \wedge \vec{B}_m = \vec{E}_m \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_m}{\omega} \right) = \frac{E_m^2}{\omega} \vec{k}.$$

D'où :

$$\vec{\Pi} = \frac{E_m^2}{\mu_0 \omega} \vec{k} \cos^2(\omega t - kz) \quad , \quad \text{soit :} \quad \boxed{\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E_m^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z} .$$

On rappelle que : $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

Le vecteur $\vec{\Pi}$ est orienté dans le sens de propagation $\vec{u}_z$ de l'onde. L'énergie se propage donc suivant le vecteur $\vec{u}_z$:

$$\vec{\Pi} = c\, e\, \vec{u}_z .$$

• Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface donne la puissance instantanée P qui traverse cette dernière. Si la surface S est perpendiculaire à la direction de propagation, on a :

$$P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \vec{\Pi} \cdot S\vec{u}_z = \Pi S .$$

La surface S est orientée dans le sens de propagation de l'onde, c'est-à-dire ici des z croissants.

Finalement :

$$\boxed{P = \varepsilon_0 \, c \, S \, E_m^2 \cos^2(\omega t - kz)} .$$

• Sa valeur moyenne vaut :

$$< P > = \varepsilon_0 c S E_m^2 < \cos^2(\omega t - kz) >, \quad \text{soit :} \quad \boxed{< P > = \frac{\varepsilon_0 c}{2} S E_m^2} .$$

d.

On rappelle l'expression de l'opérateur div en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}\, \vec{\Pi} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}.$$

On a :

$$\text{div}\, \vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E_m^2 \frac{\partial}{\partial z} (\cos^2(\omega t - kz)) = 2k \varepsilon_0 c E_m^2 \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz).$$

et :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \varepsilon_0 E_m^2 \frac{\partial}{\partial t} (\cos^2(\omega t - kz))$$
$$= -2 \varepsilon_0 \omega E_m^2 \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz)$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Cette relation montre que toute OPPH peut s'interpréter comme la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, déphasées l'une par rapport à l'autre de $(\varphi_y - \varphi_x)$.

b. Avec les relations donnant $\hat{X}$ et $\hat{Y}$, obtenues à la question 3, on a également :

$$\vec{J} = e^{j\varphi_x}\left(\frac{E_{0x}}{\sqrt{2}}(\hat{G} + \hat{D}) + \frac{E_{0y}}{j\sqrt{2}}\, e^{j(\varphi_y - \varphi_x)}(\hat{G} + \hat{D})\right)$$

qui donne :

$$\vec{J} = \frac{E_{0x}e^{j\varphi_x} - jE_{0y}e^{j\varphi_y}}{\sqrt{2}}\hat{G} + \frac{E_{0x}e^{j\varphi_x} - jE_{0y}e^{j\varphi_y}}{\sqrt{2}}\hat{D}$$

expression de la forme :

$$\hat{J} = \alpha\hat{G} + \beta\hat{D}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ étant des nombres complexes.}$$

Toute OPPH peut donc également s'interpréter comme la superposition de deux OPPH polarisées circulairement $\hat{G}$ et $\hat{D}$.

Exercice 5

1) a. Un courant est lié à un mouvement de charges électriques. Si $i(t)$ désigne l'intensité du courant qui parcourt le fil, la charge $q(t)$ en mouvement est donnée par :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Avec $i(t) = I_0\cos(\omega t)$, on a :

$$q(t) = q_0\sin(\omega t), \quad \text{où} \quad q_0 = \frac{I_0}{\omega}.$$

On peut alors définir un moment dipolaire $\delta\vec{p}$ pour le fil de longueur δz qui porte la charge q, par :

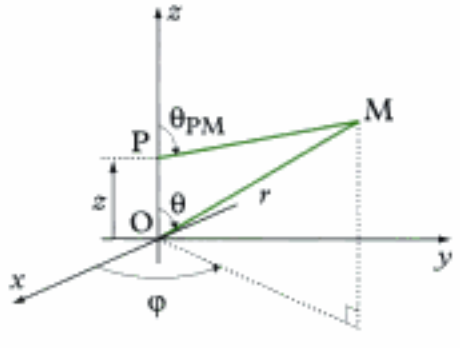
$$\boxed{\delta\vec{p}(t) = q(t)\,\delta z\,\vec{u}_z}.$$

b. On en déduit alors : $\delta\ddot{\vec{p}}(t) = \ddot{q}(t)\,\delta z\,\vec{u}_z$, soit :

$$\boxed{\delta\ddot{\vec{p}} = \frac{di}{dt}\,\delta z\,\vec{u}_z}.$$

2) a. Le champ élémentaire $d\vec{E}(P, M, t)$ s'écrit :

$$d\vec{E}(P, M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{\sin\theta_{PM}}{PM}\, d\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{PM}{c}\right)\vec{u}_\theta$$



Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

D'après l'énoncé, cette intégrale s'écrit :

$$A = \frac{\lambda}{2\pi} \times \frac{2}{1-\cos^2\theta} \cos\left(\frac{\pi\cos\theta}{2}\right), \text{ soit : } A = \frac{\lambda}{\pi\sin^2\theta} \cos\left(\frac{\pi\cos\theta}{2}\right).$$

Finalement, le champ électrique est :

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 c} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi\cos\theta}{2}\right)}{\sin\theta} \times \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \vec{u}_\varphi .$$

d. À grande distance, l'onde a localement une structure d'onde plane. On a alors :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}, \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_r .$$

Écrivons $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(\theta) \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \vec{u}_\varphi$$

Alors :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{f(\theta)}{c} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} \vec{u}_\varphi$$

e. Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ s'écrit alors :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}, \text{ soit : } \vec{\Pi} = \varepsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_r .$$

Sa valeur moyenne temporelle est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{r^2} f(\theta)^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle}_{\frac{1}{2}} \vec{u}_r$$

soit :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \frac{f(\theta)^2}{r^2} \vec{u}_r .$$

f. Le flux de $< \vec{\Pi} >$ à travers une sphère de centre O, de rayon r, donne la puissance moyenne P rayonnée par l'antenne dans tout l'espace :

$$P = \iint_{M\text{sphère}} < \vec{\Pi} > (M) \cdot d\vec{S}(M) ,$$

l'intégrale portant sur tous les points de la sphère.
Avec, au point M : $d\vec{S} = 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta \, \vec{u}_r$,
il vient :

$$P = \pi\varepsilon_0 c \int_0^\pi f(\theta)^2 \sin\theta d\theta$$

soit, en explicitant $f(\theta)$:

$$P = \frac{I_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c} \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta}_{\approx 1{,}22}$$

Copyright Material

⚠ Comme la variable φ n'intervient pas dans l'expression de Π, on intègre sur une petite couronne de rayon $2\pi r\sin\theta$ et d'épaisseur $r\mathrm{d}\theta$.

Finalement, il reste :

$$P = \frac{1{,}22\, I_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c}.$$

3. Par analogie avec l'électrocinétique du conducteur ohmique pour lequel la puissance moyenne dissipée par effet Joule est proportionnelle au carré du courant I qui traverse le conducteur ohmique :

$$P = \frac{1}{2} RI^2,$$

on peut définir la résistance de rayonnement :

$$R_r = \frac{2P}{I_0^2}, \quad \text{d'où} \quad R_r = \frac{1{,}22}{2\pi\varepsilon_0 c}.$$

Numériquement, on trouve :

$$\mathbf{R_r = 73\ \Omega.}$$

Pour une antenne de longueur a, il est possible de montrer que R_r est proportionnelle à $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$. Ainsi, plus une antenne est grande, plus sa résistance de rayonnement est élevée et plus la puissance rayonnée est importante.

4. Avec $P = 2$ MW et $R_r = 73\ \Omega$, la valeur de l'intensité maximale I_0 est :

$$I_0 = \sqrt{\frac{2P}{R_r}}.$$

Numériquement, on trouve :

$$\mathbf{I_0 = 234\ A,}$$

intensité considérable qui ne peut être envisagée dans de telles circonstances. Pour pouvoir émettre une puissance de 2 MW, une antenne de plus grande taille est nécessaire si l'on veut limiter la consommation de courant.

À titre d'information, pour avoir $I_0 = 10$ A et $P = 2$ MW, la résistance de rayonnement devrait être : $R_r = 40$ kW. La taille de l'antenne serait alors de $a = 12\lambda$. En émettant sur une fréquence de 100 MHz, cela représente une longueur d'onde $\lambda = 3$ m, soit une antenne de 36 m !

Copyrighted material

Hidden page

A. Dispersion et absorption

A.1. Le modèle du plasma

Un plasma est un gaz ionisé globalement neutre, constitué de charges en mouvement : des cations (charge $+e$, masse M, densité volumique N) et des électrons (charge $-e$, masse m, densité volumique N). La densité volumique totale de charges ρ du milieu est donc nulle :

$$\rho = \rho^+ + \rho^- = eN - eN = 0.$$

Du fait de leur mouvement, ces charges sont à l'origine d'une densité volumique de courant. On peut admettre que seuls les électrons contribuent à cette densité de courant en raison de la plus grande inertie des cations ($M \gg m$). On a donc :

$$\vec{j}_e = -Ne\vec{v}\ , \text{ où } \vec{v} \text{ est la vitesse des électrons.}$$

On suppose également le milieu suffisamment dilué pour négliger les interactions entre les charges, ce qui revient à considérer que celles-ci sont libres en l'absence de champ extérieur. Enfin, l'effet du champ de pesanteur peut aussi être négligé.

A.2. Équations de Maxwell

Dans le plasma, les équations de Maxwell s'écrivent[1] :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{(ii)} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_e + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

1. La présence du terme $\vec{j}_e$ non nul ne permet pas d'obtenir l'équation de d'Alembert.

En représentation complexe, pour une OPPH se propageant selon la direction Oz dans le sens des z croissants, ces équations deviennent[2] :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \Rightarrow \quad -jk\vec{u}_z \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad -jk\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \\ \text{(iii)} \quad \Rightarrow \quad -jk\vec{u}_z \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{(iv)} \quad \Rightarrow \quad -jk\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\vec{j}}_e + j\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}\right) \end{cases}$$

2. On écrit alors les champs sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m e^{j(\omega t - kz)} \\ \vec{B} = \vec{B}_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

Les équations (i) et (iii) montrent que l'onde dans le plasma est **transversale**. Pour exploiter les équations (ii) et (iv), il faut d'abord déterminer une expression de la densité de courant $\vec{j}_e$ en fonction du champ électromagnétique.

A.3. Densité de courant dans le plasma

La densité de courant $\vec{j}_e$ dans le plasma est due aux mouvements des électrons, soumis à la force électrique créée par le champ $\vec{E}$. Dans la suite, on ne s'intéresse qu'au régime permanent. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique aux électrons, supposés non relativistes, il vient :

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\right)\vec{v}\right) = -e\vec{E}.$$

Copyrighted material

D'après le § A.2., une OPPH se propageant selon la direction Oz dans le sens des z croissants est transversale. L'électron est constamment soumis à une force perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde : en régime permanent, on peut donc supposer que son mouvement appartient à un plan perpendiculaire à cette direction. Par ailleurs, à un instant donné, la force électrique est la même en tout point de ce plan : en régime permanent, on peut donc supposer que tous les électrons en mouvement dans ce plan ont la même vitesse. Le champ de vitesse des électrons en régime permanent ne dépend donc que de z, avec $\vec{v}(z,t)\cdot\vec{u}_z = 0$.

Par conséquent, dans la relation fondamentale de la dynamique, la dérivée convective est nulle :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(\vec{v}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{v}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{v}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v} = 0\ ^{3}.$$

3. En effet, d'une part, $v_z = 0$, d'autre part, v_x et v_y sont indépendantes de x et y.

Ainsi, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron devient en régime permanent :

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{\mathrm{E}}.$$

En représentation complexe, on peut donc rechercher le champ de vitesse des électrons sous la forme $\underline{\vec{v}}(z,t) = \underline{\vec{v}}_m e^{j(\omega t - kz)}$. On obtient :

$$jm\,\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{\mathrm{E}}}.$$

La densité de courant $\vec{j}_e = -\mathrm{N}e\vec{v}$ s'écrit donc finalement[4, 5] :

$$\boxed{\underline{\vec{j}}_e = -j\frac{\mathrm{N}e^2}{m\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}}.$$

4. On remarque la relation linéaire entre la densité de courant et la champ électrique, le coefficient de proportionnalité s'interprétant comme une conductivité, ici imaginaire pure. Ces deux grandeurs sont donc en quadrature de phase. La puissance moyenne cédée par l'onde au plasma est par conséquent nulle :

$$\left\langle \vec{j}\cdot\vec{\mathrm{E}}\right\rangle = 0$$

(*cf.* cours d'électromagnétisme).

5. La relation de conservation :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_e = 0$$

mène en représentation complexe à :

$$-jk\vec{u}_z\cdot\underline{\vec{j}}_e = 0,$$

relation en accord avec l'expression trouvée.

A.4. Relation de dispersion

On peut désormais combiner les équations de Maxwell (ii) et (iv) en éliminant $\underline{\vec{j}}_e$. On obtient la condition de compatibilité de ces deux équations :

$$-jk\vec{u}_z\wedge\left(\frac{k\vec{u}_z\wedge\underline{\vec{\mathrm{E}}}}{\omega}\right) = \mu_0\left(-j\frac{\mathrm{N}e^2}{m\omega} + j\varepsilon_0\omega\right)\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

qui devient :

$$jk^2\frac{\underline{\vec{\mathrm{E}}}}{\omega} = j\varepsilon_0\mu_0\omega\left(1 - \frac{\mathrm{N}e^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}\right)\underline{\vec{\mathrm{E}}}.$$

En posant $\omega_p = \sqrt{\dfrac{\mathrm{N}e^2}{\varepsilon_0 m}}$, cette relation s'écrit finalement :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}.$$

6. Il est possible que ω soit complexe et k réel. Cependant, conformément au programme de deuxième année, seul les cas pour lesquels ω est réel et k est complexe sont traités.

Cette relation porte le nom de **relation de dispersion**. Elle montre en particulier que si ω est réel[6], k peut être complexe, car le terme entre parenthèse peut être positif ($\omega > \omega_p$) ou négatif ($\omega < \omega_p$). Dans toute la suite, nous le noterons par conséquent $\underline{k}$.

Copyrighted material

A.5. Interprétation physique

A.5.1. Premier cas : $\omega > \omega_p$

Si $\omega > \omega_p$, alors $\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) > 0$. La relation de dispersion montre que $\underline{k}$ est réel ; on note par la suite : $\underline{k} = k'$. On peut alors écrire, en ne retenant que la racine positive :

$$k'(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} .$$

En représentation complexe, le champ électrique a alors pour expression :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \vec{E}_m e^{j(\omega t - k'(\omega) z)} ,$$

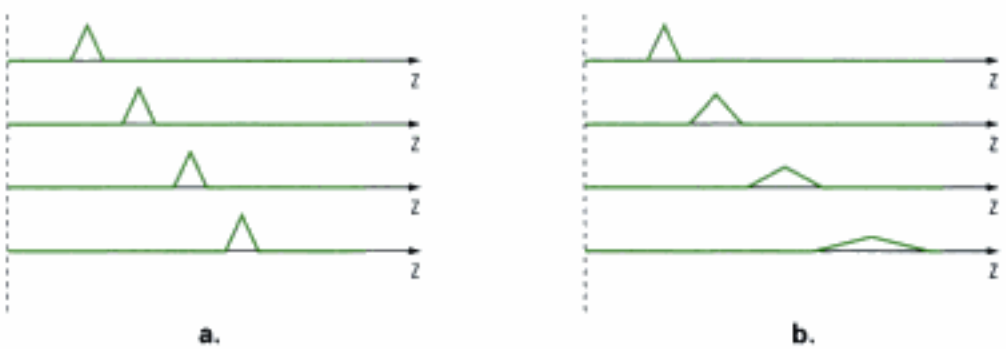
soit, en représentation réelle :

$$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(z,t)] = \vec{E}_m \cos\left(\omega t - k'(\omega) z\right) .$$

Ce champ est associé à une onde qui se propage suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants avec une amplitude constante E_m[7]. Les plans équiphases[8], donnés à l'instant t par l'équation : $z = \frac{\omega}{k'(\omega)} t + cste$, se propagent à la vitesse de phase v_φ telle que :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}} .$$

On remarque tout d'abord que $v_\varphi > c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide[9]. D'autre part, la vitesse de phase dans le plasma n'est pas une constante pour toutes les OPPH (comme dans le vide[10]), mais elle dépend de la pulsation ω de l'onde. Ainsi, pour une onde qui serait la superposition de plusieurs OPPH, la propagation de ces OPPH ne se faisant pas à la même vitesse de phase dans le plasma, on observerait un étalement de l'onde au cours de sa propagation : on parle de **dispersion spatiale** (fig. 1).



a. b.

Fig. 1 - **a.** Propagation non dispersive - **b.** Propagation dispersive.

Pour caractériser le milieu dans lequel une onde électromagnétique se propage, on introduit la notion d'**indice optique** n'[11] défini par la relation :

$$\boxed{k' = n'\frac{\omega}{c}} .$$

7. Dans ce cas, la structure d'une OPPH est la même que dans le vide. L'onde est donc transversale, les vecteurs $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ formant un trièdre direct avec :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} .$$

8. Deux plans sont dits équiphases à l'instant t si la phase du champ électrique est la même dans ces deux plans, égale à une valeur donnée.

9. Ce résultat, bien que surprenant au premier abord, ne contredit pas le postulat selon lequel aucune information ne peut se propager plus vite que la lumière. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant en introduisant la notion de vitesse de groupe.

10. Dans le vide, on a :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c .$$

11. L'indice optique n' est une grandeur sans dimension.

Copyrighted material

Dans le plasma, il vaut donc :

$$n' = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \ .$$

L'indice optique du plasma n' dépend de la pulsation ω : on dit que le milieu est **dispersif**[12].

12. Cette notion est à rapprocher de l'étude de la dispersion de la lumière par un prisme, vue en première année. Le verre qui constitue le prisme est un milieu dans lequel les différentes longueurs d'ondes de la lumière blanche se propagent à des vitesses différentes. La réfraction de l'onde dans le verre, qui dépend de l'indice du prisme, n'est pas la même pour toutes les longueurs d'ondes : on parle de dispersion par le prisme.

A.5.2. Second cas : $\omega < \omega_p$

Si $\omega < \omega_p$, alors $\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) < 0$. La relation de dispersion montre que $\underline{k}$ est imaginaire pur ; on note par la suite : $\underline{k} = jk''$. On peut alors écrire, en ne retenant que la racine de partie imaginaire négative :

$$k''(\omega) = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \ .$$

En représentation complexe, le champ électrique a pour expression :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} e^{j\omega t}$$

soit, en représentation réelle :

$$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}[\underline{\vec{E}}(z,t)] = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z}\cos(\omega t) \ .$$

Ce champ est associé à une onde qui ne se propage pas dans le plasma, car les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. La notion de vitesse de phase n'a pas de sens ici. Si, au cours du temps, l'amplitude de l'onde oscille, elle décroît de manière exponentielle dans le milieu[13].

L'onde n'existe donc pratiquement plus dès qu'elle pénètre dans le plasma : on parle de phénomène d'**absorption** et on dit que l'onde est **évanescente**. Cette absorption peut être caractérisée par la distance caractéristique :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} \ , \text{ appelée } \textbf{profondeur de pénétration}[14].$$

Comme l'indice optique précédemment, on définit l'**indice d'extinction** n''[15] par la relation :

$$\boxed{|k''| = n''\frac{\omega}{c}} \ .$$

Dans le plasma, il vaut donc :

$$n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \ .$$

13. La solution $k'' > 0$ aurait donné lieu à une croissance exponentielle de l'amplitude. Ce phénomène est observé quand l'onde reçoit de l'énergie de la part du milieu. C'est le cas en particulier de milieux gazeux actifs comme ceux utilisés dans les lasers.

14. Dans les milieux conducteurs, cette profondeur de pénétration de l'onde est plus traditionnellement appelée épaisseur de peau.

15. L'indice d'extinction n'' est une grandeur sans dimension.

A.5.3. Cas général

L'étude de l'existence et de la propagation d'une onde électromagnétique dans le plasma a permis d'introduire les phénomènes de dispersion et d'absorption. Les deux phénomènes étaient alors observables dans des domaines de pulsation bien distincts. Cependant, dans la plupart des milieux, ces deux phénomènes sont simultanément présents.

Copyrighted material

Ainsi, dans le cas général, pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, on décompose $\underline{k}$ en sa partie réelle k' et sa partie imaginaire k'' : $\underline{k} = k' + jk''$[16]. En représentation complexe, le champ électrique a alors pour expression :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} e^{j(\omega t - k'(\omega)z)}$$

soit, en représentation réelle :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} \cos(\omega t - k'(\omega)z)\,.$$

– Le facteur $\cos(\omega t - k'(\omega)z)$ traduit la propagation d'une OPPH dans le milieu. La vitesse de phase v_φ se définit par :

$$v_\varphi(\omega) = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\omega t - k'z = cte} = \frac{\omega}{k'(\omega)}\,.$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'onde, ce qui correspond au phénomène de dispersion.

– Le facteur $e^{k''(\omega)z}$ est un coefficient d'amortissement ($k'' < 0$) ou d'amplification ($k'' > 0$) de l'amplitude de l'onde. En général, on a $k'' < 0$, car la situation $k'' > 0$ amène une modification de comportement du système (non linéarité) ou sa destruction. Le cas $k'' < 0$ correspond au phénomène d'absorption, caractérisé par la profondeur de pénétration :

$$\delta = \frac{1}{|k''|}\,.$$

Elle représente l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle l'onde se propage dans le milieu. Au-delà de quelques δ, l'onde a été pratiquement totalement absorbée par le milieu. Le cas particulier où $k' = 0$ et $k'' < 0$ est celui d'une onde évanescente (pas de propagation).

16. On peut également choisir d'écrire $\underline{k}$ sous la forme : $k' - jk''$.

Propriété 1

La **relation de dispersion**[17] donnant $\underline{k}$ en fonction de la pulsation ω détermine les conditions d'existence et de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel. Dans le cas général, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} \cos(\omega t - k'(\omega)z)\,, \text{ avec } \underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega).$$

– Le terme harmonique correspond à la propagation d'une OPPH. Le **phénomène de dispersion** est caractérisé par la **vitesse de phase,** fonction de ω :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)}\,.$$

– Le terme exponentiel correspond à un amortissement si $k'' < 0$. Le **phénomène d'absorption** est caractérisé par la **profondeur de pénétration** :

$$\delta = \frac{1}{|k''|}\,.$$

17. La relation de dispersion est obtenue à partir des équations de Maxwell.

La notion d'indice complexe $\underline{n}$ s'introduit naturellement en posant :

$$\underline{k}(\omega) = \underline{n}(\omega)\frac{\omega}{c}\,.$$

Pour avoir $n'' > 0$ quand $k'' < 0$ (la situation la plus courante), on écrit :

$$\underline{n} = n' - jn'',$$

où n' et n'' sont respectivement l'indice optique et l'indice d'extinction du milieu[18].

18. L'absence de dispersion se traduit par $n' = cte$.
L'absence d'absorption se traduit par $n'' = 0$.

B. Paquet d'ondes

B.1. Notion de paquet d'ondes

Toute onde physique, quelle que soit sa nature, est en général non périodique, limitée dans le temps et dans l'espace. Une OPPH, qui n'a aucune limite spatiale et temporelle, n'a donc pas de sens physique. La notion de **paquet d'ondes** permet de rendre compte des limitations spatiale et temporelle de l'onde réelle. Dans toute la suite, on néglige les phénomènes d'absorption.

B.1.1. Superposition de deux OPPH

Commençons par étudier la superposition de deux OPPH de même amplitude, non déphasées, de pulsations ω_1 et ω_2 proches, en propagation à la même vitesse c le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants. L'onde résultante peut alors s'écrire[19] :

$$\Psi(x,t) = \frac{\Psi_m}{2}\left[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right].$$

19. Le facteur $\frac{1}{2}$ est un facteur de normalisation : l'amplitude de l'onde résultante est ainsi ψ_m.

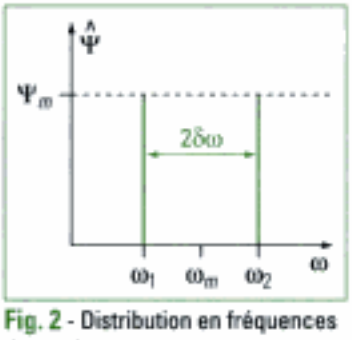


Fig. 2 - Distribution en fréquences des ondes.

La figure 2 donne la distribution en fréquences des deux ondes se superposant. En l'absence de déphasage, elle suffit à caractériser complètement, d'un point de vue fréquentiel, l'onde résultante. Les deux pulsations ω_1 et ω_2 étant proches, on pose :

$$\omega_1 = \omega_m - \delta\omega \text{ et } \omega_2 = \omega_m + \delta\omega, \text{ avec } \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ et } \delta\omega \ll \omega_m.$$

L'absence de dispersion se traduit par les relations :

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c}.$$

Comme pour les pulsations, on pose pour les vecteurs d'onde :

$$k_1 = k_m - \delta k \text{ et } k_2 = k_m + \delta k, \text{ avec } k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\omega_m}{c} \text{ et } \delta k = \frac{\delta\omega}{c} \ll k_m.$$

En utilisant les formules trigonométriques, l'onde résultante peut alors se mettre sous la forme :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m \underbrace{\cos\left(\delta\omega\, t - \delta k\, x\right)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\omega_m t - k_m x\right)}_{\text{onde moyenne}}.$$

Cette onde s'écrit donc comme le produit de deux sinusoïdes, celle de pulsation $\delta\omega$ variant beaucoup plus lentement que celle de pulsation ω_m :

– La première constitue l'enveloppe de l'onde, qui se propage à la vitesse :

$$\boxed{v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

On reconnait la somme des $2N+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{j(\delta\omega t - \delta k x)}$:

$$\Psi(x,t) = \frac{\Psi_m}{2N+1} \mathrm{Re}\left[e^{j(\omega_m t - k_m x)} \times e^{-jN(\delta\omega t - \delta k x)} \frac{1 - e^{j(2N+1)(\delta\omega t - \delta k x)}}{1 - e^{j(\delta\omega t - \delta k x)}} \right].$$

21. On rappelle que :
$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}.$$

En utilisant l'écriture complexe du sinus[21], le terme à droite du signe « fois » se simplifie en un rapport réel de sinus. On obtient donc finalement :

$$\Psi(x,t) = \frac{\Psi_m}{2N+1} \underbrace{\frac{\sin\left[\frac{2N+1}{2}(\delta\omega t - \delta k x)\right]}{\sin\left[\frac{(\delta\omega t - \delta k x)}{2}\right]}}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos(\omega_m t - k_m x)}_{\text{onde moyenne}}.$$

On peut à nouveau décomposer cette expression comme le produit d'un terme correspondant à l'enveloppe et d'un terme correspondant à l'onde moyenne (fig.5).

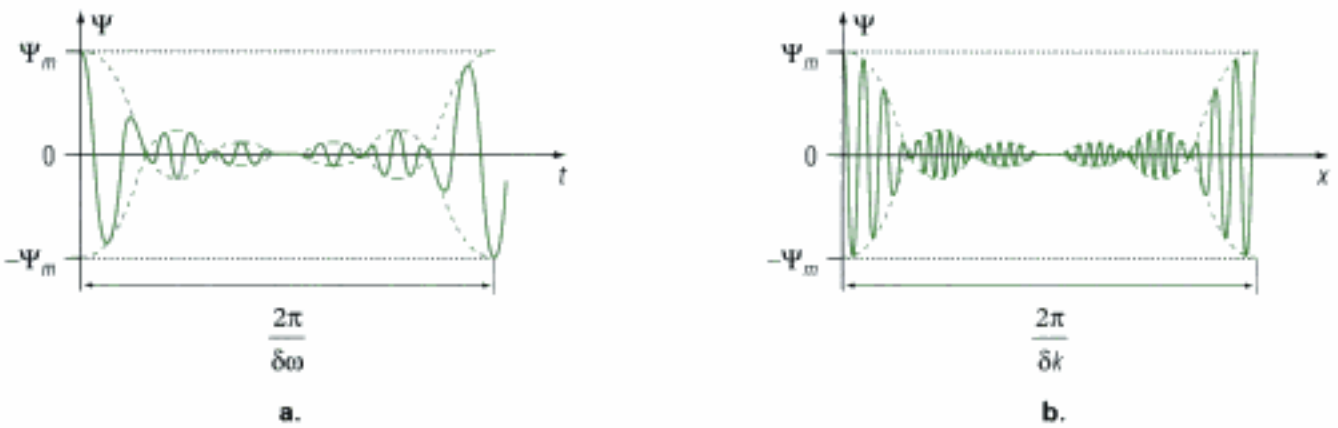


Fig. 5 - Évolutions de l'onde résultante : **a.** Évolution temporelle en $x = 0$. **b.** Évolution spatiale à $t = 0$.

On observe que l'onde résultante prend des valeurs notables dans les ventres de l'enveloppe, séparés d'une période temporelle $\frac{2\pi}{\delta\omega}$ et d'une période spatiale $\frac{2\pi}{\delta k}$[22]. En dehors de ces ventres, les oscillations sont d'amplitude négligeable. En ce sens, l'onde résultante se rapproche d'une onde physique localisée à la fois dans certaines régions de l'espace et du temps. Elle conserve cependant une double périodicité, que l'on peut éliminer par passage au continu.

22. On peut vérifier que ces valeurs sont bien les périodes temporelle et spatiale du rapport des deux sinus.

B.1.3. Superposition d'une infinité d'OPPH

• Dans l'expression du § B.1.2, on effectue le passage à la limite $N \to \infty$, sachant que pour tout N entier on a : $\Delta\omega = N\,\delta\omega$ et $\Delta k = N\,\delta k$, où $\Delta\omega$ et Δk sont constants. Ce passage à la limite entraîne donc aussi $\delta\omega \to 0$ et $\delta k \to 0$. On a donc :

$$\begin{cases} \sin\left[\frac{2N+1}{2}(\delta\omega t - \delta k x)\right] \to \sin\left[\Delta\omega t - \Delta k x\right] \\ (2N+1)\sin\left[\frac{\delta\omega t - \delta k x}{2}\right] = \frac{2N+1}{2}(\delta\omega t - \delta k x) = \Delta\omega t - \Delta k x \end{cases}$$

Copyrighted material

23. On rappelle que :
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et prend la valeur maximale 1 en 0.

On obtient ainsi pour l'onde résultante[23] :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\Delta\omega t - \Delta k x\right)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\omega_m t - k_m x\right)}_{\text{onde moyenne}}.$$

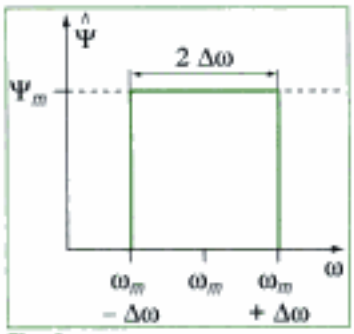
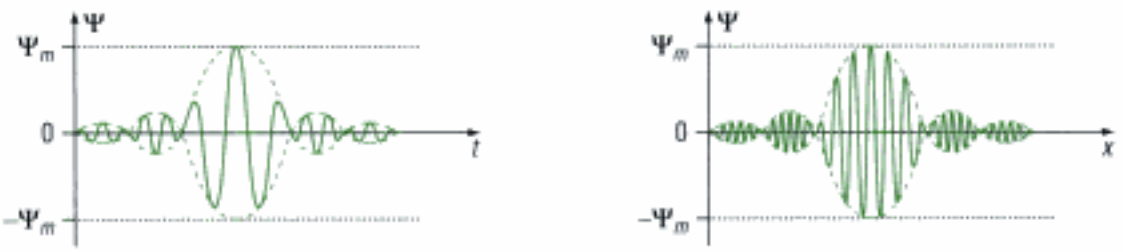


Fig. 6 - Distribution en fréquences des ondes.

Dans le passage à la limite, comme $\delta\omega \to 0$ et $\delta k \to 0$ simultanément, la vitesse de groupe v_g tend vers la dérivée de la fonction $\omega(k)$ en ω_m :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \to \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(\omega_m).$$

Au cours de cette procédure, la distribution fréquentielle de l'onde est devenue une fonction continue de la fréquence sur l'intervalle $[\omega_m - \Delta\omega, \omega_m + \Delta\omega]$, nulle en dehors de cet intervalle (fig.6).



a. **b.**

Fig. 7 - Paquet d'ondes : **a.** Évolution temporelle pour x fixé. **b.** Évolution spatiale pour t fixé.

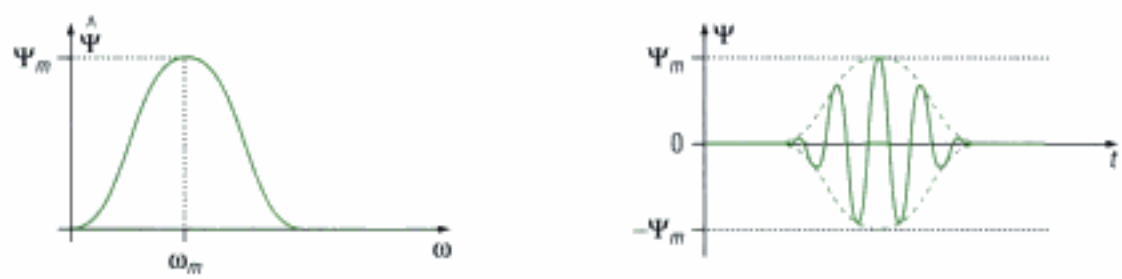
Sur la figure 7, on observe les localisations temporelle et spatiale de l'onde sans périodicité. Il est également possible de caractériser les largeurs temporelle et spatiale par respectivement[24] :

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad \text{et} \quad \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}.$$

24. Ces largeurs correspondent aux largeurs des ventres.

On constate en particulier que $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$, résultat général de l'analyse de Fourier qui constitue le cadre naturel d'étude des paquets d'ondes.

• En superposant un nombre fini d'OPPH, puis en passant à la limite (passage du discret au continu), nous avons construit pas à pas un paquet d'ondes. Celui-ci apparaît cependant peu physique en raison du caractère simpliste de la distribution fréquentielle. D'autres modèles, plus réalistes, sont généralement adoptés. Citons l'exemple de la distribution fréquentielle gaussienne pour laquelle le paquet d'ondes est lui aussi gaussien (fig.8).



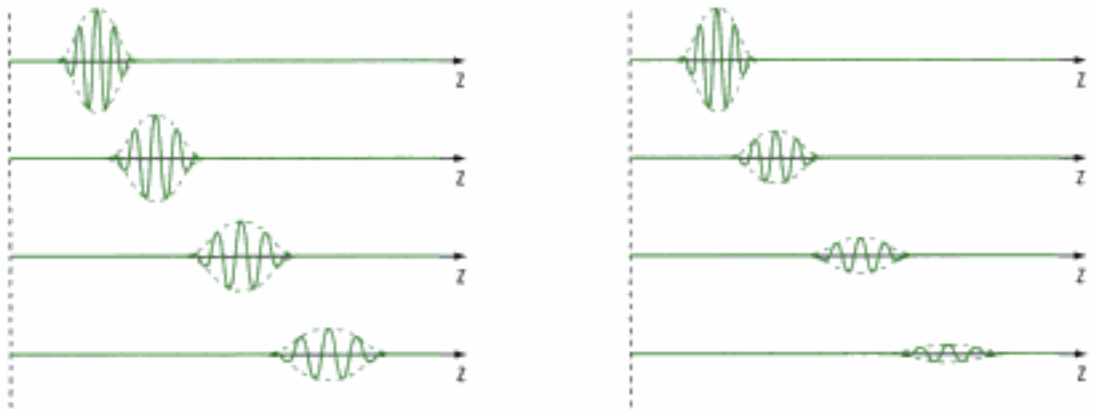
a. Densité spectrale

b. Évolution temporelle pour x fixé

Fig. 8 - Paquet d'ondes gaussien.

Copyrighted material

Hidden page



a. Dispersion sans absorption. **b.** Dispersion avec absorption.

Fig. 9 - Dispersion d'un paquet d'ondes.

On peut montrer que dans les milieux non absorbants, la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie, ou de manière équivalente, de l'information. La vitesse de groupe est donc toujours plus petite que la célérité de la lumière dans le vide. En revanche, il n'est pas rare de trouver des vitesses de phase supérieures à c. Ce dernier point ne constitue pas une difficulté : en effet, la phase ne transporte pas d'énergie, donc elle ne transporte ni matière ni information utile !

C. Réflexion et réfraction d'une OPPH (filière PSI)

C.1. Réflexion et réfraction entre deux isolants

C.1.1. Position du problème

On considère une OPPH polarisée rectilignement, de pulsation ω_i, incidente à l'interface plane qui sépare deux milieux isolants (milieux 1 et 2), non chargés, linéaires, homogènes et isotropes. L'onde tombe au point O de l'interface plane, appelée **dioptre** (fig.10).

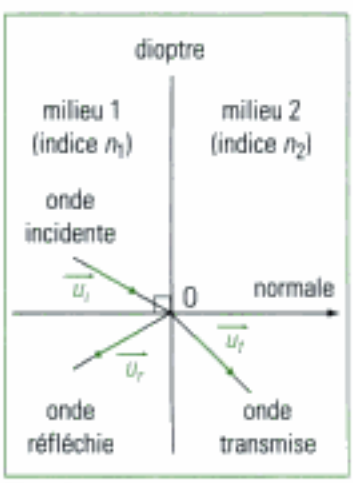


Fig. 10 - Réflexion et réfraction sur un dioptre.

L'onde incidente se propage dans la direction définie par le vecteur d'onde :

$$\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega_i}{c} \vec{u}_i ,$$

dont la direction fait un angle i_1 avec la normale en O au dioptre. En représentation complexe, le champ électrique et le champ magnétique de l'onde incidente en un point M du milieu s'écrivent[25] :

$$\underline{\vec{E}}_i(M,t) = \underline{\vec{E}}_{i,m} e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega_i}.$$

Au niveau du dioptre, cette onde donne naissance à une onde réfléchie qui se propage dans le milieu 1 et à une onde transmise qui se propage dans le milieu 2.

25. L'expression du champ magnétique est donnée par l'équation (ii) de Maxwell.

Copyrighted material

On admet que ces ondes sont encore des OPPH, respectivement de pulsations ω_r et ω_t, de vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_r = n_1 \frac{\omega_r}{c} \vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega_t}{c} \vec{u}_t .$$

On note i_1' l'angle fait par la direction de $\vec{k}_r$ avec la normale en O au dioptre et i_2 l'angle fait par la direction de $\vec{k}_r$ avec cette même normale en O. En représentation complexe, le champ électrique et le champ magnétique de l'onde réfléchie s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_r(M,t) = \underline{\vec{E}}_{r,m} e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM})} \text{ et } \underline{\vec{B}}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \underline{\vec{E}}_r}{\omega_r}$$

et le champ électrique et le champ magnétique de l'onde transmise s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_t(M,t) = \underline{\vec{E}}_{t,m} e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM})} \text{ et } \underline{\vec{B}}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}}_t}{\omega_t} .$$

Le champ électromagnétique total dans le milieu 1 est la superposition des champs des ondes incidente et réfléchie. Le champ électromagnétique dans le milieu 2 est seulement le champ de l'onde transmise.

milieu 1 : $\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r$ et $\underline{\vec{B}}_1 = \underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r$

milieu 2 : $\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_t$ et $\underline{\vec{B}}_2 = \underline{\vec{B}}_t$

C.1.2. Conditions aux limites

Les équations de Maxwell dans les milieux matériels permettent d'établir les relations de passage entre les composantes normales (indice N) et tangentielles (indice T) des champs électrique et magnétique au niveau du dioptre[26].

26. La démonstration de ces relations, introduites dans le cours d'électromagnétisme, est hors programme.

Théorème 2

Relations de passage

Au niveau du dioptre (surface de séparation entre le milieu 1 d'indice n_1 et le milieu 2 d'indice n_2), les relations de passage s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & n_2^2 \vec{E}_{2N} - n_1^2 \vec{E}_{1N} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \text{(ii)} & \vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} = \vec{0} \\ \text{(iii)} & \vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N} = \vec{0} \\ \text{(iv)} & \vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

σ et $\vec{j}_S$ désignent respectivement la densité surfacique de charges libres et la densité surfacique de courants libres au niveau du dioptre.

$\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal au dioptre dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

Pour un milieu isolant non chargé[27], ces relations donnent les conditions aux limites suivantes :

27. « Isolant » signifie qu'il n'y a pas de courant surfacique libre : $j_S = 0$. « Non chargé » signifie qu'il n'y a pas de charge surfacique libre : $\sigma = 0$.

– pour le champ électrique :

$$n_2^2 \vec{E}_{2N} - n_1^2 \vec{E}_{1N} = 0 \text{ et } \vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} = 0 .$$

– pour le champ magnétique :

$$\vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N} = 0 \text{ et } \vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = 0 .$$

Le champ magnétique n'est pas modifié à la traversée du dioptre.

C.1.3. Lois de Descartes

Parmi les relations précédentes, la continuité de la composante tangentielle des champs électriques s'exprime par l'égalité :

$$\vec{\underline{E}}_{i,m,T} e^{j(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OM})} + \vec{\underline{E}}_{r,m,T} e^{j(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \overrightarrow{OM})} = \vec{\underline{E}}_{t,m,T} e^{j(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \overrightarrow{OM})} \quad \textbf{(1)}$$

L'égalité (1) est vérifiée à tout instant. Les dépendances temporelles doivent donc être identiques, ce qui impose que les pulsations sont égales. On pose ainsi :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega.$$

On peut alors écrire l'égalité (1) sous la forme :

$$\vec{\underline{E}}_{i,m,T} + \vec{\underline{E}}_{r,m,T} e^{-j(\vec{k}_r - \vec{k}_i)\cdot \overrightarrow{OM}} = \vec{\underline{E}}_{t,m,T} e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i)\cdot \overrightarrow{OM}} \quad \textbf{(1')}$$

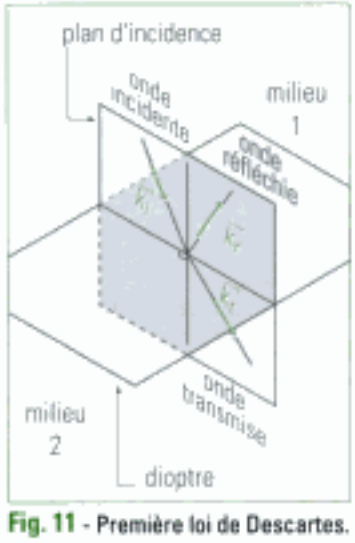


Fig. 11 - Première loi de Descartes.

L'égalité (1') est vérifiée en tout point M du dioptre. Les deux produits scalaires sont donc nécessairement nuls :

$$\left(\vec{k}_r - \vec{k}_i\right)\cdot \overrightarrow{OM} = 0 \text{ et } \left(\vec{k}_t - \vec{k}_i\right)\cdot \overrightarrow{OM} = 0 .$$

Les vecteurs entre parenthèses sont donc perpendiculaires au dioptre, ce que l'on peut exprimer par les relations :

$$\vec{k}_r - \vec{k}_i = a\vec{n}_{12} \text{ et } \vec{k}_t - \vec{k}_i = b\vec{n}_{12}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Les vecteurs d'onde $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$ appartiennent donc au plan défini par les vecteurs $\vec{k}_i$ et $\vec{n}_{12}$ fixés, appelé plan d'incidence (fig.11).

Loi 1

Première loi de Descartes

Les vecteurs d'onde $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie et $\vec{k}_t$ de l'onde transmise appartiennent au **plan d'incidence** défini par le vecteur d'onde $\vec{k}_i$ de l'onde incidente et le vecteur unitaire normal au dioptre $\vec{n}_{12}$.

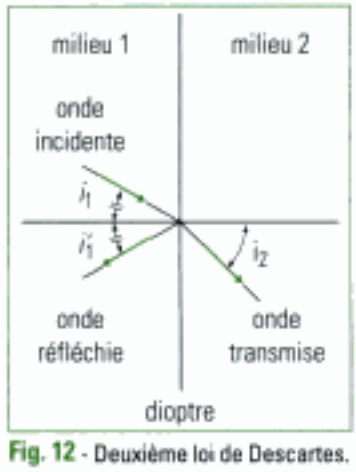


Fig. 12 - Deuxième loi de Descartes.

En introduisant les angles i_1, i_1' et i_2 définis au § C.1.1, on peut écrire que les composantes tangentielles des vecteurs $(\vec{k}_r - \vec{k}_i)$ et $(\vec{k}_t - \vec{k}_i)$ sont nulles. On obtient les deux relations :

$$n_1 \sin i_1' - n_1 \sin i_1 = 0 \text{ et } n_2 \sin i_2 - n_1 \sin i_1 = 0 ,$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{i_1' = i_1} \text{ et } \boldsymbol{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2} .$$

Ces deux résultats sont connus traditionnellement sous les noms de loi de la réflexion et de loi de la réfraction. Ils constituent la deuxième loi de Descartes[28] (fig.12).

28. Les deux lois de Descartes sont indépendantes de la polarisation de l'onde.

Copyrighted material

Loi 2

Deuxième loi de Descartes

Les vecteurs d'onde $\vec{k}_i$ de l'onde incidente, $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie et $\vec{k}_t$ de l'onde transmise ont même composante tangentielle.

C.1.4. Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

On s'intéresse aux amplitudes des champs électriques réfléchi et transmis, connaissant l'amplitude du champ électrique incident. Pour simplifier l'étude, on considère une incidence normale pour laquelle :

$$i_1 = i_1' = i_2 = 0\,;\ \vec{k}_r = -\vec{k}_i \ \text{ et } \ \vec{k}_t = \frac{n_2}{n_1}\vec{k}_i\,.$$

Dans ce cas, les champs électrique et magnétique n'ont pas de composante normale[29]. Les relations de passage au niveau du dioptre se réduisent aux deux relations vectorielles traduisant la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques :

$$\vec{\mathrm{E}}_{1\mathrm{T}} = \vec{\mathrm{E}}_{2\mathrm{T}} \ \text{ et } \ \vec{\mathrm{B}}_{1\mathrm{T}} = \vec{\mathrm{B}}_{2\mathrm{T}}\,.$$

29. De même, il n'est pas possible de définir de plan d'incidence.

Sans perte de généralité, on peut choisir l'axe Oz comme axe normal au dioptre et confondre le dioptre avec le plan xOy. On peut également choisir l'axe Ox comme direction de polarisation du champ électrique. Au point O, on a alors[30] :

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{E}}_{1\mathrm{T}} = \vec{\mathrm{E}}_{2\mathrm{T}} & \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{E}}_{i,m}\vec{u}_x + \underline{\mathrm{E}}_{r,m}\vec{u}_x = \underline{\mathrm{E}}_{t,m}\vec{u}_x \\ \vec{\mathrm{B}}_{1\mathrm{T}} = \vec{\mathrm{B}}_{2\mathrm{T}} & \Rightarrow \quad n_1\underline{\mathrm{E}}_{i,m}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x\right) - n_1\underline{\mathrm{E}}_{r,m}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x\right) = n_2\underline{\mathrm{E}}_{t,m}\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x\right) \end{cases}$$

30. D'après les hypothèses, on a en effet ici :

$$\vec{\mathrm{B}}_i = \frac{n_1}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{E}}_i$$

$$\vec{\mathrm{B}}_r = -\frac{n_1}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{E}}_r$$

$$\vec{\mathrm{B}}_t = \frac{n_2}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{\mathrm{E}}_t$$

Le signe moins dans la seconde relation vient du fait que la propagation du champ électrique réfléchi se fait dans le sens de $-\vec{u}_z$. On aboutit finalement au système simple suivant :

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{E}}_{i,m} + \underline{\mathrm{E}}_{r,m} = \underline{\mathrm{E}}_{t,m} \\ n_1\underline{\mathrm{E}}_{i,m} - n_1\underline{\mathrm{E}}_{r,m} = n_2\underline{\mathrm{E}}_{t,m} \end{cases}$$

On définit alors les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} en amplitude du champ électrique par les rapports :

$$\boldsymbol{r_{12}} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_{r,m}}{\underline{\mathbf{E}}_{i,m}} \ \text{ et } \ \boldsymbol{t_{12}} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_{t,m}}{\underline{\mathbf{E}}_{i,m}}\,.$$

Dans le cas de l'incidence normale, pour une OPPH se propageant du milieu 1 (d'indice n_1) vers le milieu 2 (d'indice n_2), les **coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12}** en amplitude du champ électrique s'écrivent :

$$\boldsymbol{r_{12}} = \frac{\boldsymbol{n_1 - n_2}}{\boldsymbol{n_1 + n_2}} \ \text{ et } \ \boldsymbol{t_{12}} = \frac{\boldsymbol{2n_1}}{\boldsymbol{n_1 + n_2}}\,.$$

Ces résultats montrent en particulier que dans des milieux transparents pour lesquels les indices sont réels[31], la transmission n'introduit aucun changement de phase puisque le coefficient t_{12} est toujours positif. En revanche, la réflexion introduit un déphasage de π si $n_1 < n_2$.

31. C'est-à-dire, sans absorption.

Copyrighted material

Il est par ailleurs intéressant de noter l'analogie entre les ondes électromagnétiques et les ondes sonores. Le champ électrique, lié à l'existence d'un déséquilibre en charges dans l'espace, est l'analogue de la surpression, alors que le champ magnétique, défini à partir d'un courant de particules chargées, est l'analogue du champ des vitesses. Ainsi, en définissant l'impédance électromagnétique par le rapport :

$$\underline{Z} = \mu_0 \frac{\underline{E}}{\underline{B}}$$ [32],

les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique s'écrivent comme pour la surpression :

$$r_{12} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad r_{12} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

32. Pour une OPPH se propageant dans un milieu d'indice n, on a :

$$Z = \mu_0 \frac{c}{n}.$$

C.1.5. Coefficients de réflexion et transmission en énergie

On définit les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance par les relations :

$$\mathbf{R} = \frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}.$$

Pour une OPPH se propageant dans un milieu transparent d'indice n, les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting valent :

$$\langle \Pi \rangle = n\varepsilon_0 c \frac{E_m^2}{2}.$$

On en déduit donc les relations :

$$R = \frac{E_{r,m}^2}{E_{i,m}^2} = r_{12}^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{E_{t,m}^2}{E_{i,m}^2} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2.$$

Dans le cas de l'incidence normale, pour une OPPH se propageant du milieu 1 (d'indice n_1) vers le milieu 2 (d'indice n_2), les **coefficients de réflexion R et de transmission T** en puissance s'écrivent :

$$\mathbf{R} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

On remarque que R + T = 1, cette relation traduisant la conservation de l'énergie dans un milieu non absorbant. Par ailleurs, les expressions précédentes étant invariantes par permutation des indices 1 et 2, elles ne permettent pas de connaître le sens de propagation de l'onde incidente : d'un point de vue énergétique, le dioptre possède les mêmes propriétés que l'onde se propage du milieu 1 au milieu 2, ou du milieu 2 au milieu 1.

C.2. Réflexion sur un conducteur parfait [33]

C.2.1. Propagation dans un conducteur

Contrairement à un isolant, un matériau conducteur contient des charges libres susceptibles de se déplacer dans tout le volume. Le caractère conducteur ou isolant d'un matériau peut ainsi se déterminer en comparant la densité de

33. Ce modèle a été introduit dans le cours d'électromagnétisme.

Copyrighted material

courant de charges libres $\vec{j}_l$ et la densité de courant de déplacement $\vec{j}_d$ qui interviennent dans l'équation (iv) de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_l + \vec{j}_d\right), \text{ avec } \vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Pour un milieu conducteur, on a généralement : $j_d \ll j_l$. L'équation précédente devient alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l.$$

Pour une OPPH de pulsation ω en propagation dans le conducteur, on a en outre :

$$\underline{\vec{j}}_l = \sigma \underline{\vec{E}},$$

où σ désigne la conductivité du matériau qui dépend *a priori* de ω. En supposant le milieu suffisamment conducteur dans le domaine de pulsations étudié, les équations de Maxwell (ii) et (iv) s'écrivent en représentation complexe :

$$\begin{cases} \text{(ii)} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow \quad -j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \\ \text{(iv)} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l & \Rightarrow \quad -j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}}_l \end{cases}$$

le vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$ étant *a priori* complexe.

Enfin, en combinant cette équation avec la relation constitutive du matériau conducteur, on obtient la relation de dispersion[34] :

$$\boxed{\underline{k}^2 = -j\mu_0\sigma\omega}, \text{ d'où : } \underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}(1-j).$$

34. Pour trouver la relation de dispersion du conducteur, la démarche est la même que pour le plasma.

En introduisant l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$, on peut encore écrire :

$$\underline{k} = \frac{(1-j)}{\delta}.$$

Pour une propagation selon l'axe Oz dans le sens des z croissants, le champ électrique dans le conducteur a donc pour expression (fig. 13):

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_m e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}.$$

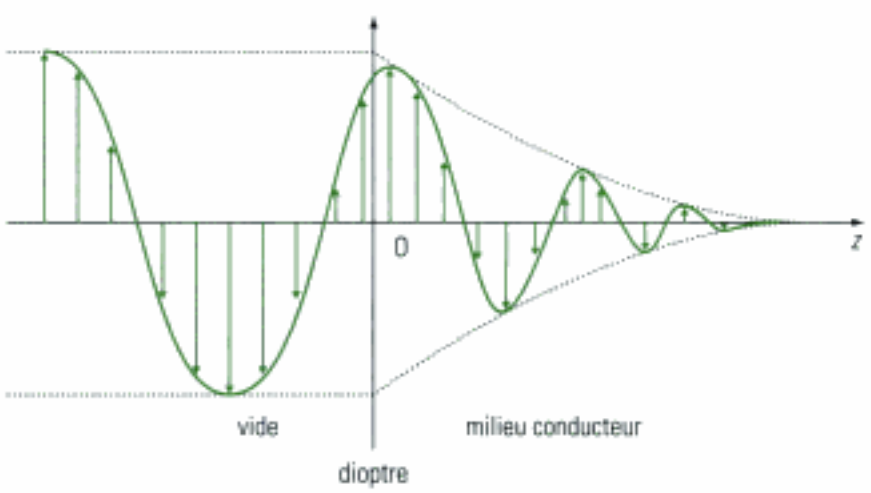


Fig. 13 - Évolution du champ électrique dans un conducteur (cas d'une polarisation rectiligne).

Copyrighted material

L'amplitude du champ dans le conducteur décroît exponentiellement avec la distance. Elle est pratiquement nulle quand l'onde s'est propagée sur une distance de quelques δ[35]. La relation linéaire entre la densité de courant $\vec{j}_l$ et le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ montre donc que les courants sont localisés au voisinage de la surface du conducteur : c'est **l'effet de peau**.

35. Pour $z = 5\delta$, l'amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur initiale.

C.2.1. Réflexion sur un conducteur parfait

Dans un conducteur parfait, la conductivité est infinie. L'épaisseur de peau est alors nulle $\delta = 0$ et l'onde ne peut pas se propager dans le milieu. En conséquence, le champ électrique et le champ magnétique sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait. Ainsi, par continuité de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface entre les deux milieux[36], une OPPH incidente se propageant dans le vide et tombant sur un conducteur parfait est donc totalement réfléchie. Un conducteur parfait se comporte comme **un miroir parfaitement réfléchissant** qui ne dissipe pas d'énergie.

36. Sur un conducteur parfait, il n'y a pas continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface entre les deux milieux. Il existe une discontinuité associée à l'apparition d'une densité superficielle de courant.

Une onde qui tombe sous incidence normale sur un conducteur parfait est **totalement** réfléchie. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie valent donc :

$$\begin{cases} r_{12} = -1 & \text{et} \quad t_{12} = 0 \\ \mathrm{R} = 1 & \text{et} \quad \mathrm{T} = 0 \end{cases}$$

C.2.2. Caractère stationnaire de l'onde

Considérons un conducteur parfait plan dont la normale définit l'axe Oz. Une OPPH de pulsation ω se propageant dans le vide, qui tombe sous incidence normale sur le conducteur, est totalement réfléchie. On peut écrire, en représentation complexe :

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}}_i(z,t) = \vec{\mathrm{E}}_{i,m} e^{j(\omega t - kz)}; \quad \underline{\vec{\mathrm{E}}}_r(z,t) = -\vec{\mathrm{E}}_{i,m} e^{j(\omega t + kz)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{\mathrm{E}}}_t(z,t) = 0, \text{ avec } \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Le champ électrique total dans le vide est la superposition des champs électriques de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}}_{tot}(z,t) = \vec{\mathrm{E}}_{i,m} e^{j(\omega t - kz)} - \vec{\mathrm{E}}_{i,m} e^{j(\omega t + kz)},$$

soit, en représentation réelle :

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}}_{tot}(z,t) = 2\vec{\mathrm{E}}_{i,m} \sin(\omega t)\sin(kz)}.$$

Cette expression est celle d'une onde stationnaire qui s'annule sur le conducteur ($z = 0$).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

→ Savoir faire

❶ Chercher une solution de l'équation d'onde sous la forme, en représentation complexe :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

où ω est réel et $\underline{k}$ *a priori* complexe.

❷ En déduire la relation de dispersion entre $\underline{k}$ et ω. L'écrire sous la forme :

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - jk''(\omega), \text{ avec } k''(\omega) \geq 0.$$

❸ En déduire le caractère dispersif et absorbant du milieu :

– Si $k'(\omega) = 0$, il n'y a pas de propagation.

– Si $k'(\omega)$ est une fonction linéaire, il y a propagation sans dispersion.

– Si $k'(\omega) \neq 0$ et n'est pas une fonction linéaire, il y a propagation avec dispersion.

– Si $k''(\omega) \neq 0$, il y a absorption.

→ Application

1. On considère l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \omega_0^2\Psi = 0$$

où c et ω_0 sont des constantes positives.
Déterminer la relation de dispersion, les vitesses de phase et de groupe. Y a-t-il dispersion, absorption ? Donner l'expression de $\Psi(x,t)$ en représentation réelle.

2. On considère à présent l'équation d'onde dite de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \omega_0^2\Psi = 0\,.$$

Déterminer la relation de dispersion, les vitesses de phase et de groupe. Y a-t-il dispersion, absorption ? Donner l'expression de $\Psi(x,t)$ en représentation réelle.

3. On considère l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - a\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

où a est une constante positive. Déterminer la relation de dispersion. Montrer qu'il y a propagation d'une onde avec dispersion et absorption. Exprimer la profondeur de pénétration δ de l'onde.

Solution

1) ❶ L'équation d'onde étant linéaire, on peut rechercher $\underline{\Psi}$ sous la forme :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \Psi_m e^{j(\omega t - \underline{k}x)},$$

❷ de sorte que l'équation d'onde donne :

$$(\underline{k}^2c^2 - \omega^2 - \omega_0^2)\underline{\Psi} = 0.$$

D'où la relation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]}$$

Copyrighted material

3) La relation entre $\underline{k}$ et ω n'est pas linéaire. Le milieu dans lequel se propage l'onde est **dispersif**. Le membre de droite de l'équation précédente est toujours positif. Par conséquent, $\underline{k}$ est réel. Il n'y a **pas d'absorption**. On a :

$$k = \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

Par la suite, on ne conserve que la solution positive.

La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ vaut :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}}}$$

Cette vitesse dépend de ω, autre façon de dire que le milieu est dispersif.

Pour calculer la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, il est préférable de partir de la relation de dispersion sous la forme :

$$k^2c^2 = \omega^2 + \omega_0^2.$$

En dérivant, on obtient :

$$2c^2 k\, dk = 2\omega\, d\omega$$

puis :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega}, \text{ soit : } \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi}.$$

D'où :

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

On déduit alors l'expression réelle de Ψ :

$$\boxed{\Psi(x,t) = \Psi_m \cos\left[\omega\left(t - \sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\,\frac{x}{c}\right)\right]}$$

❷ Avec l'équation de Klein-Gordon, il suffit de remplacer ω_0^2 par $(-\omega_0^2)$ dans la relation de dispersion de la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]}$$

La relation entre $\underline{k}$ et ω est encore non linéaire. Le milieu est donc **dispersif**. Mais le second membre de l'équation peut à présent être négatif. On doit alors considérer deux cas :

– Si $\omega > \omega_0$, on a : $\underline{k}^2 > 0$. Alors :

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

Il y a propagation ($\mathrm{Re}[\underline{k}] \neq 0$) sans absorption ($\mathrm{Im}[\underline{k}] = 0$). Cette situation est celle de la question précédente. La vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

Copyrighted material

et la vitesse de groupe :

$$v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\,.$$

L'expression réelle de Ψ est :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m \cos\left[\omega\left(t - \sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\,\frac{x}{c}\right)\right]$$

– Si $\omega < \omega_0$, on a : $\underline{k}^2 < 0$. Alors :

$$\underline{k} = \pm j\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1}\,.$$

Il n'y a plus de propagation ($\mathrm{Re}[\underline{k}] = 0$), mais une absorption ($\mathrm{Im}[\underline{k}] \neq 0$). On ne peut donc plus définir ni vitesse de phase, ni vitesse de groupe. L'expression réelle de Ψ est :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t)$$

onde stationnaire atténuée. On a introduit la profondeur de pénétration :

$$\delta = \frac{1}{|\underline{k}|}\,, \text{ soit : } \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}\,.$$

3) ❷ Avec l'équation de diffusion, on a :

$$j\omega + a\underline{k}^2 = 0, \text{ soit : } \quad \underline{k}^2 = -j\,\frac{\omega}{a}\,.$$

En remarquant que $(1-j)^2 = -2j$, on peut écrire :

$$\underline{k}^2 = (1-j)^2\,\frac{\omega}{2a}$$

La relation entre $\underline{k}$ et ω est non linéaire. On a encore affaire à un phénomène dispersif. En outre, $\underline{k}$ est à présent complexe :

$$\underline{k} = \pm\,(1-j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,.$$

Il y a **propagation dispersive** ($\mathrm{Re}[\underline{k}] \neq 0$) avec **absorption** ($\mathrm{Im}[\underline{k}] \neq 0$) de l'onde par le milieu. La solution physiquement acceptable est :

$$\underline{k} = (1-j)\,\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

de sorte que l'amplitude de Ψ décroît :

$$\Psi(x,t) = \Psi_m\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

où l'on a introduit la profondeur de pénétration de l'onde :

$$\delta = \frac{1}{|k''|}\ (k'' = \mathrm{Im}[\underline{k}]), \text{ soit : } \quad \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}\,.$$

La vitesse de phase est : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$ et la vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$, avec $k' = \mathrm{Re}[\underline{k}]$. Ainsi :

$$v_\varphi = \sqrt{2a\omega} \text{ et } v_g = \sqrt{8a\omega}\,.$$

Copyrighted material

Méthode n°2

Comment déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique ?

On considère la propagation d'une OPPH dans un milieu transparent non absorbant d'indice n.

→ Savoir faire

❶ Exprimer l'impédance électromagnétique Z caractéristique du milieu en fonction de son indice n. Par définition, pour un milieu non magnétique :

$$Z = \mu_0 \frac{E}{B}.$$

❷ Utiliser l'analogie avec les ondes acoustiques :

$$Z = \frac{p}{v} \leftrightarrow Z = \mu_0 \frac{E}{B}, \quad p \leftrightarrow E, \quad v \leftrightarrow \frac{B}{\mu_0}, \text{ d'où : } \quad r_p \leftrightarrow r \text{ et } t_p \leftrightarrow t.$$

❸ En déduire les expressions des coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique.

→ Application

Une OPPH tombe sous incidence normale sur un dioptre séparant deuxmilieux transparents non absorbants d'indices respectifs n_1 et n_2. Calculer les coefficients r et t.

Solution

❶ Pour une OPPH en propagation dans un milieu transparent non absorbant d'indice n, on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}, \quad \text{avec } \vec{k} = n\frac{\omega}{c}.$$

Avec, par définition : $Z = \mu_0 \frac{E}{B}$, il vient :

$$\boxed{Z = \frac{\mu_0 c}{n}}.$$

On peut aussi l'écrire : $Z = \frac{Z_0}{n}$, avec $Z_0 = \mu_0 c$ impédance du vide.

❷ En utilisant l'analogie avec les ondes sonores, on a, lors de la réflexion d'une OPPH électromagnétique tombant sous incidence normale sur un dioptre :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \text{ car } p \leftrightarrow E.$$

❸ Avec $Z_1 = \frac{\mu_0 c}{n_1}$ et $Z_2 = \frac{\mu_0 c}{n_2}$, on déduit :

$$r = \frac{\frac{\mu_0 c}{n_2} - \frac{\mu_0 c}{n_1}}{\frac{\mu_0 c}{n_1} + \frac{\mu_0 c}{n_2}} = \boxed{\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{et :} \quad t = \frac{2\frac{\mu_0 c}{n_2}}{\frac{\mu_0 c}{n_1} + \frac{\mu_0 c}{n_2}} = \boxed{\frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Ondes élastiques dans un réseau cristallin

Un réseau cristallin est constitué d'une chaîne infinie d'atomes situés, à l'équilibre, aux abscisses x_n telles que $x_{n-1} - x_n = a$, la distance a étant constante. Une perturbation longitudinale écarte chaque atome de sa position d'équilibre d'une quantité Ψ_n très petite devant a. Chaque atome est alors soumis à des interactions modélisées par des forces de rappel de raideur K exercées par les plus proches voisins seulement.

1) On suppose que tous les atomes sont identiques, de masse m.

a. Déterminer l'équation du mouvement de chaque atome de la chaîne.

b. Montrer que des ondes élastiques longitudinales de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$, de représentation complexe :

$$\underline{\Psi}_n(t) = \mathrm{A}\, e^{j(\omega t - kx_n)}$$

peuvent se propager dans la chaîne à condition que ω et k vérifient une relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

c. Tracer le graphe de $\omega = \omega(k)$ pour :

$$\frac{-\pi}{a} \ll k \ll \frac{\pi}{a}$$

domaine de valeurs appelé première zone de Brillouin. Montrer que des ondes ne peuvent se propager le long de la chaîne que si la pulsation reste inférieure à une valeur maximale ω_{max}.
Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Que deviennent ces résultats dans la limite continue dont on précisera les propriétés ?

2) Le réseau cristallin est à présent constitué de deux types d'atomes. Les atomes de masses m sont situés aux positions paires $2n$, ceux de masses M sont situés aux positions impaires $2n + 1$.

a. Déterminer les équations du mouvement des atomes de positions paires et de positions impaires.

b. On cherche des solutions de la forme :

$$\underline{\Psi}_{2n}(t) = \mathrm{A}\, e^{j(\omega t - kx_{2n})} \quad \text{et} \quad \underline{\Psi}_{2n+1}(t) = \mathrm{B}\, e^{j(\omega t - kx_{2n+1})}$$

avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$. Montrer que pour une valeur de k donnée, il existe deux valeurs possibles de ω que l'on notera $\omega_{op}(k)$ et $\omega_{ac}(k)$ avec $\omega_{op} > \omega_{ac}$.

c. Tracer les graphes de $\omega_{op}(k)$ et $\omega_{ac}(k)$ pour :

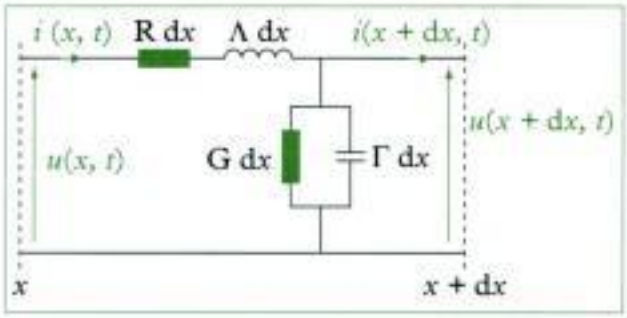
$$\frac{-\pi}{2a} \ll k \ll \frac{\pi}{2a}$$

première zone de Brillouin pour la chaîne à deux types d'atomes. Montrer en particulier l'existence d'une bande interdite de valeurs de ω dans laquelle aucune propagation n'est possible.

d. Que deviennent ces résultats dans la limite continue ?

Ex. 2 Ligne électrique avec pertes

On considère une ligne électrique avec pertes. Outre les effets inductifs et capacitifs de la ligne, on tient compte de l'existence de pertes liées au caractère non parfait des fils conducteurs et des composants.



1) Établir les relations donnant $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial i}{\partial x}$ en fonction de u, i, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$.

2) Déterminer les équations d'ondes dont u et i sont les solutions. Identifier la vitesse de propagation des ondes sur la ligne.

3) On envisage la propagation d'une OPPH sur la ligne, de représentation complexe :

$$\underline{u}(x,t) = u_m\, e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = i_m\, e^{j(\omega t - kx)}.$$

Déterminer la relation de dispersion et la mettre sous la forme $k^2 = f(\omega)$.

4) Montrer que la propagation se fait avec atténuation de l'amplitude de l'onde. La propagation peut-elle se faire sans dispersion ? Conclure.

Ex. 3 Réflexion entre deux plans parallèles conducteurs

Une onde électromagnétique plane transversale se propage suivant l'axe Oz entre deux plans conducteurs parfaits. Ces plans, perpendiculaires à l'axe Oz, sont situés en $z = 0$ et $z = \mathrm{L}$.

1) Quelles sont les contraintes imposées par les conditions aux limites ? Montrer que le champ électromagnétique entre les plans peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\mathrm{E}}(z,t) = \mathrm{Z}(z)\mathrm{F}(t)\vec{u}_x.$$

2) Déterminer les expressions des fonctions $\mathrm{Z}(t)$ et $\mathrm{F}(t)$.

3) En déduire la forme générale de la solution.

Niveau 2

Ex. 4 Diffusion thermique dans l'air

Un milieu solide conducteur de la chaleur occupe le demi-espace $x > 0$. Il est caractérisé par ses propriétés

Copyrighted material

physiques suivantes : capacité thermique massique c, masse volumique ρ, conductivité thermique λ. Il est en contact, en $x = 0$, avec un plan dont la température varie suivant la loi :

$$T_p(t) = T_0 + \theta_m \cos(\omega t) .$$

On rappelle la loi de Fourier relative à la diffusion de la chaleur :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T .$$

En effectuant un bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx de solide, située entre les abscisses x et x + dx, établir l'équation de diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 .$$

Exprimer la diffusivité a en fonction des caractéristiques du milieu et préciser son unité.

2) On cherche l'évolution de la température du milieu, en régime harmonique établi. On adopte la représentation complexe :

$$\underline{T}(t) = A e^{j(\omega t - kx)} .$$

a. Déterminer la relation de dispersion. Exprimer le vecteur d'onde sous la forme $k' + jk''$.

b. Déterminer l'expression réelle de la température dans le mileu. Montrer en particulier l'existence d'une profondeur de pénétration caractéristique δ de l'onde dans le milieu.

c. Exprimer les vitesses de phase et de groupe.

Ex. 5 Influence de la viscosité de l'air sur la propagation du son

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore dans l'air le long de l'axe Ox en tenant compte de la viscosité de l'air.

1) Rappeler les trois équations de couplage linéarisées de la surpression p, de l'écart ρ à la masse volumique à l'équilibre ρ_0 et de la vitesse des particules fluides $\vec{v}$, dans le cas où la viscosité de l'air n'est pas prise en compte.

2) Si l'on tient compte de la viscosité de l'air, l'équation d'Euler linéarisée devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

où η désigne le coefficient de viscosité du fluide. Justifier brièvement cette expression.

3) En déduire l'équation d'onde vérifiée par la surpression.

4) On recherche des solutions pour p sous la forme d'OPPH de représentation complexe :

$$\underline{p}(x,t) = p_m e^{j(\omega t - kx)}$$

Quelle est la relation de dispersion ? Mettre sous la forme $k = k' - jk''$.

5) Déterminer l'expression réelle de la surpression.

6) Exprimer la vitesse de phase de l'onde.

7) Si on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquences est-il préférable de choisir pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ? Que devient la vitesse de phase dans ce cas ?

On rappelle la relation d'analyse vectorielle :

$$\Delta(\text{div}\,\vec{V}) = \text{div}(\Delta\vec{V}) .$$

Niveau 3

Ex. 6 Ondes sonores dans un pavillon

1) Un pavillon acoustique de révolution d'axe Ox a une section variable $S(x)$ croissante. On étudie la propagation d'une onde sonore dans le pavillon. Soit une tranche de fluide d'épaisseur située entre x et x + dx, à l'équilibre. À l'instant t, cette tranche de fluide s'est déplacée et elle est située entre :

$$x + \psi(x, t) \text{ et } x + dx + \psi(x + dx, t).$$

Dans toute la suite, on suppose que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \ll 1 .$$

a. En effectuant un bilan des forces qui s'exercent sur la tranche de fluide précédente, montrer que $\psi(x, t)$ et la surpression $p(x, t)$ sont liés par la relation :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} .$$

b. Les transformations du fluide étant supposées adiabatiques, montrer que :

$$p = -\frac{1}{S\chi_S}\frac{\partial(S\psi)}{\partial x}$$

où χ désigne le coefficient de compressibilité isentropique.

c. En déduire l'équation d'onde vérifiée par ψ et celle vérifiée par p.

2) On s'intéresse au cas d'un pavillon exponentiel pour lequel $S(x) = S_0 e^{\alpha x}$.

a. Que deviennent les équations vérifiées par ψ et p ?

b. On recherche des solutions de type onde plane. Discuter la pertinence d'un tel choix.

c. On adopte, pour ces solutions, la représentation complexe :

$$\underline{\psi}(x,t) = A e^{j(\omega t - kx)} .$$

Déterminer la relation de dispersion entre k et ω. Montrer en particulier l'existence d'une pulsation de coupure ω_c en-dessous de laquelle aucune propagation n'est possible.

d. Exprimer les vitesses de phase et de groupe quand il y a propagation.

Ex. 7 Propagation d'une onde en présence d'un conducteur

Une interface plane sépare le vide (milieu 1) d'un milieu conducteur (milieu 2) de conductivité γ.

Copyrighted material

L'interface définit le plan xOy. On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques parallèlement à la surface de séparation des deux milieux dont les champs électriques et magnétiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_i(x,z,t) = \vec{F}_i(z)\, e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{\vec{B}}_i(x,z,t) = \vec{G}_i(z)\, e^{j(\omega t - kx)} \end{cases}$$

avec $i = 1, 2$.

1) Le conducteur est supposé parfait.

a. Que valent les champs $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$?

b. Écrire les équations de Maxwell pour $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$.

c. En déduire les relations vérifiées par $\vec{F}_1$ et $\vec{G}_1$ et leurs dérivées $\vec{F}_1'$ et $\vec{G}_1'$.

d. On suppose que : $F_{1,x} = 0$ et $G_{1,x} = 0$ (onde TEM). Déterminer la relation de dispersion.

e. En déduire les vitesses de phase et de groupe de l'onde. La présence du plan conducteur perturbe-t-il la propagation de l'onde ? Préciser.

f. Déterminer les expressions de $F_{1,y}$, $G_{1,y}$, $G_{1,z}$ en fonction de $F_{1,x}$.

Exprimer le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ pouvant exister dans le plan xOy.

2) Le conducteur possède maintenant une conductivité γ finie.

a. Montrer que la densité volumique de charge peut être considérée comme nulle dans le conducteur.

b. Déterminer la relation de dispersion. En déduire l'existence d'une profondeur de pénétration caractéristique δ.

c. Pour l'eau de mer, à basse fréquence, la conduction vaut : $\gamma = 4{,}4\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. L'utilisation de la gamme de fréquence VLF (basse fréquence) pour le système de communication permettrait-il de relier les avions et les SNLE (Sous-marins Nucléaires Lanceurs d'Engins) ? Expliquez les contraintes imposées. On prendra comme exemple une fréquence de 100 Hz à 1 kHz.

On rappelle les relations d'analyse vectorielle :

$$\mathrm{div}(f\vec{V}) = f\,\mathrm{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{V}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{V}$$

Ex. 8 Onde hélicon

Un plasma est constitué d'électrons de charge $-e$ et de masse m, et d'ions de charge $+e$ et de masse M avec $M \gg m$. On note respectivement n_e et n_i les densités électroniques et ioniques. Le plasma étant globalement neutre, on a $n_e = n_i$. On suppose le plasma peu dense de manière à négliger les collisions dues à l'agitation thermique, et on suppose les charges en mouvement non relativistes.

Une onde électromagnétique plane harmonique se propage suivant l'axe Oz dans le plasma. La représentation complexe de son champ électrique est :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \vec{E}_m e^{j(\omega t - kz)}.$$

Dans toutes les questions, on adopte une représentation complexe des grandeurs physiques.

1) L'onde se propage dans un plasma dans lequel n'existe aucun champ magnétique extérieur.

a. Justifier que l'effet du champ magnétique de l'onde soit négligeable devant celui du champ électrique.

b. Déterminer la densité de courant $\vec{j}$ dans le plasma. Montrer que le milieu présente une conductivité $\underline{\sigma}$ complexe due en quasi-totalité aux électrons.

c. Montrer que l'onde se propageant dans le plasma est transversale.

d. Établir la relation de dispersion du plasma. Montrer que l'onde ne peut se propager dans le plasma que si :

$$\omega > \omega_p, \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}.$$

e. Lorsqu'il y a propagation, déterminer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g.

2) La haute atmosphère, appelée ionosphère, se comporte comme un plasma. Si on néglige l'action du champ magnétique terrestre, elle se comporte comme un plasma isotrope semblable à celui étudié à la question précédente. Si l'on tient compte de l'action du champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$ sur les électrons, elle se comporte alors comme un plasma anistrope et les conditions de propagation dépendent des orientations des différents champs de l'onde et de son vecteur d'onde par rapport à $\vec{B}_T$. Dans la suite, on posera :

$$\omega_c = \frac{eB_T}{m}.$$

a. Montrer que pour une OPPH se propageant dans la direction Oz en présence de $\vec{B}_T$, le champ magnétique de l'onde reste transversal alors que son champ électrique peut avoir une composante longitudinale E_z liée à l'existence d'une composante j_z de la densité de courant.

b. L'onde se propage à présent dans la direction du champ magnétique terrestre : les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{B}_T$ sont tous deux dirigés suivant Oz.

(i) Montrer que le champ électrique reste transversal.

(ii) En négligeant les frottements, établir, en représentation complexe, les expressions des composantes $\underline{v}_x$ et $\underline{v}_y$ de la vitesse d'un électron. Peut-on définir simplement une conductivité pour le milieu ?

(iii) Une onde polarisée rectilignement peut se décomposer en deux ondes polarisées circulairement : une onde circulaire gauche et une onde circulaire droite. On note $E_{x,G}$, $E_{y,G}$, $E_{x,D}$, $E_{y,D}$ leurs composantes. Montrer que, pour chacune de ces ondes, on peut définir des conductivités σ_G et σ_D.

(iv) Quelles sont les relations de dispersion associées à ces polarisations ? Montrer que si $\omega << \omega_c << \omega_p$, une onde incidente polarisée rectilignement se transforme en une onde polarisée circulairement.

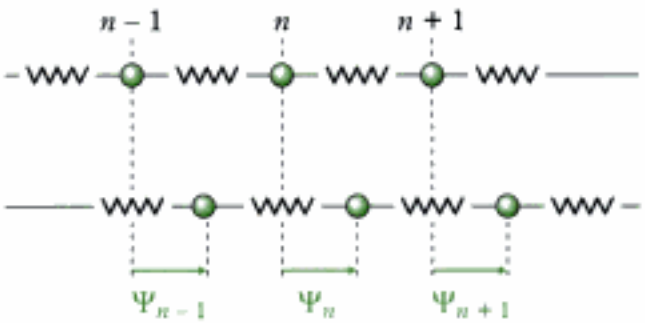
Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) a. La situation est la suivante.



L'application de la relation fondamentale de la dynamique à la masse m donne :

$$m\ddot{\Psi}_n = -K(\Psi_n - \Psi_{n-1}) - K(\Psi_n - \Psi_{n+1})$$

soit :

$$\boxed{\ddot{\Psi}_n = \omega_0^2 (\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1})} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

b. L'équation précédente étant linéaire, on peut adopter une représentation complexe :

$$\underline{\Psi}_n = A e^{j(\omega t - k x_n)}.$$

Alors : $\quad \underline{\ddot{\Psi}}_n = -\omega^2 \underline{\Psi}_n$

et : $\quad \underline{\Psi}_{n+1} - 2\underline{\Psi}_n + \underline{\Psi}_{n-1} = \underline{\Psi}_n [e^{-jka} - 2 + e^{jka}]$

en utilisant : $x_{n+1} = x_n + a$ et $x_{n-1} = x_n - a$.

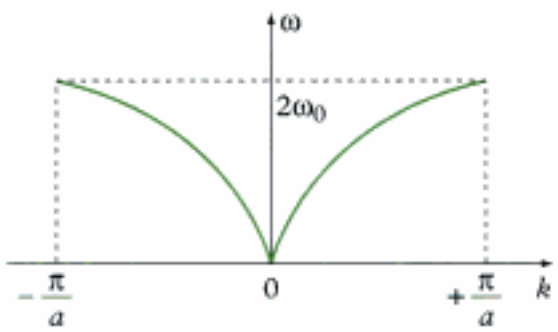
Finalement, on obtient :

$$-\omega^2 \underline{\Psi}_n = \omega_0^2 (2\cos(ka) - 2)\underline{\Psi}_n, \quad \text{soit} \quad \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)).$$

Avec $\cos(ka) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$, il vient :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right), \quad \text{puis} \quad \boxed{\omega = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|} \text{ (relation de dispersion).}$$

c. Pour $|k| \leqslant \frac{\pi}{a}$, le graphe de $\omega(k)$ est le suivant :



Copyrighted material

La relation de dispersion montre que, quelle que soit la valeur de k :

$$\omega \leqslant \omega_{max}, \quad \text{avec} \quad \omega_{max} = 2\omega_0.$$

d. • La vitesse de phase v_φ est : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$, soit :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{2\omega_0}{k}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{a}\right)$$

• La vitesse de groupe v_g est : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$, soit :

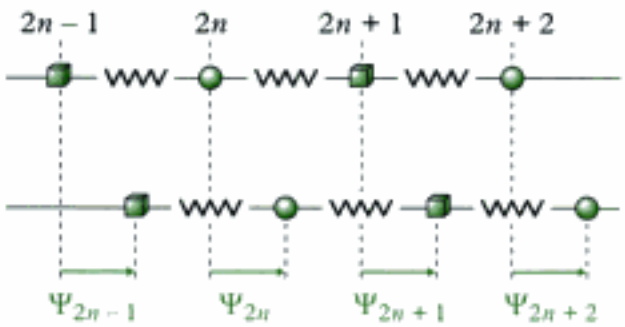
$$\boxed{v_g = a\omega_0 \cos\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{\pi}{a}\right)$$

e. La limite continue correspond à $ka \longrightarrow 0$. Cela revient à écrire que $a \ll \lambda$. L'influence de l'onde se fait alors ressentir sur plusieurs atomes. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} v_\varphi &\longrightarrow a\omega_0 \\ v_g &\longrightarrow a\omega_0 . \end{aligned}$$

On constate que $v_g = v_\varphi$. Pour $a << \lambda$, le phénomène de dispersion disparaît.

2) a. La situation est à présent la suivante :



En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à chaque type de masses, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{\Psi}_{2n} = -K(\Psi_{2n} - \Psi_{2n-1}) - K(\Psi_{2n} - \Psi_{2n+1}) \\ M\ddot{\Psi}_{2n+1} = -K(\Psi_{2n+1} - \Psi_{2n}) - K(\Psi_{2n+1} - \Psi_{2n+2}) \end{cases}$$

b. En recherchant des solutions sous la forme :

$$\Psi_{2n} = A\,e^{j(\omega t - kx_{2n})} \quad \text{et} \quad \Psi_{2n+1} = B\,e^{j(\omega t - kx_{2n+1})}$$

le système précédent devient :

$$\begin{cases} -m\omega^2 A = K\left[B e^{-jka} - 2A + B e^{jka}\right] \\ -M\omega^2 B = K\left[A e^{-jka} - 2B + A e^{jka}\right] \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \dfrac{2K}{m}\right)A + \dfrac{2K}{m}\cos(ka)B = 0 \\ \dfrac{2K}{M}\cos(ka)A + \left(\omega^2 - \dfrac{2K}{M}\right)B = 0 \end{cases}$$

Copyrighted material

Ce système admet des solutions non triviales si :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \dfrac{2K}{m} & \dfrac{2K}{m}\cos(ka) \\ \dfrac{2K}{M}\cos(ka) & \omega^2 - \dfrac{2K}{M} \end{vmatrix} = 0$$

qui donne :

$$\omega^4 - 2K\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\omega^2 + \frac{4K^2}{mM}\sin^2(ka) = 0 .$$

Introduisons la masse réduite μ définie par :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}.$$

Les seules solutions physiquement acceptables (c'est-à-dire, telles que $\omega \geqslant 0$) de l'équation bicarrée sont :

$$\omega_{op} = \sqrt{\frac{K}{\mu}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2(ka)}}$$

$$\omega_{ac} = \sqrt{\frac{K}{\mu}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2(ka)}}$$

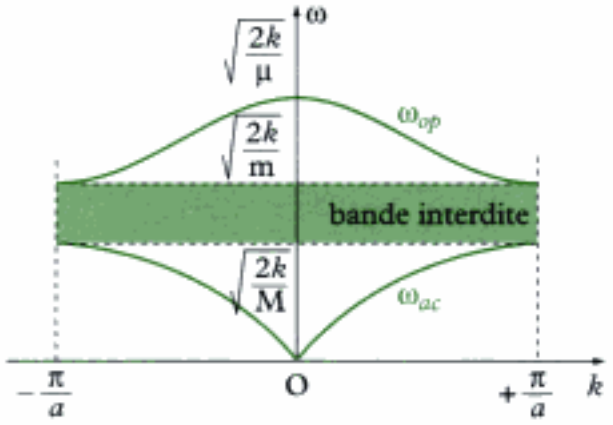
On ne garde évidemment que les valeurs positives de la pulsation.

La relation de dispersion n'est plus une relation unique, mais une relation multiple.

c. Avec ka variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ω_{op} varie de $\sqrt{\frac{2K}{\mu}}$ à $\sqrt{\frac{2K}{m}}$; ω_{ac} varie de 0 à $\sqrt{\frac{2K}{M}}$.

On peut noter que : $\sqrt{1 - \frac{4\mu}{mM}} = \frac{M - m}{M + m}$.

Avec $\sqrt{\frac{2K}{M}} < \sqrt{\frac{2K}{m}} < \sqrt{\frac{2K}{\mu}}$, on obtient les graphes suivants :



Copyrighted material

Dans le domaine $\sqrt{\frac{2K}{M}} < \omega < \sqrt{\frac{2K}{m}}$, aucune valeur de ω n'est autorisée. Il ne peut y avoir propagation d'une onde ayant de telles valeurs de pulsation dans le cristal. La même remarque vaut pour les pulsations $\omega > \sqrt{\frac{2K}{\mu}}$.

Ainsi, une onde incidente sur le cristal ayant une pulsation qui correspond aux valeurs interdites précédentes est entièrement réfléchie.

Les deux courbes précédentes portent un nom. On nomme *branche acoustique* le graphe de $\omega_{ac}(k)$. Elle correspond au domaine de propagation d'ondes sonores dans le cristal.
On nomme *branche optique* le graphe de $\omega_{op}(k)$. Elle correspond au domaine des ondes électromagnétiques qui exciteraient le cristal.

d. Dans la limite continue, pour laquelle $ka << 1$, on a :

$$\omega_{ac} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_{op} = \sqrt{\frac{2K}{\mu}}.$$

– Dans le premier cas, les équations en A et B de la question **2) b** montrent alors que :

$$A = B.$$

Les deux types d'atomes oscillent **en phase**, avec la **même amplitude**.

– Dans le second cas, ces mêmes équations montrent que :

$$mA = -MB.$$

Les deux types d'atomes oscillent **en opposition de phase**, les plus lourds oscillant avec une amplitude plus faible que les plus légers, le centre d'inertie restant cependant fixe (puisque $mA + MB = 0$).

Exercice 2

1) On a :

$$\begin{cases} u(x,t) - u(x+dx,t) = \Lambda\, dx \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + R dx\, i(x,t) \\ i(x,t) - i(x+dx,t) = \Gamma dx \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + G dx\, u(x,t) \end{cases}$$

soit, à l'ordre 1 en dx :

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + Gu \end{aligned}}$$

2) On a alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) - R\frac{\partial i}{\partial x}$$

soit, en remplaçant $\frac{\partial i}{\partial x}$ par son expression dans la deuxième équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + Gu\right) + R\left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} + Gu\right)$$

Copyrighted material

Hidden page

• Avec $k' = \dfrac{\omega}{c}$ et $k'' = -\sqrt{\Gamma R}$, il vient dans la deuxième équation :

$$2\frac{\omega}{c}\sqrt{\Gamma R} = -(\Lambda G + \Gamma R)\,\omega$$

soit :

$$\Lambda G + \Gamma R - 2\sqrt{\Lambda G \Gamma R} = 0$$

qui s'écrit encore :

$$\left(\sqrt{\Lambda G} + \sqrt{\Gamma R}\right)^2 = 0.$$

Finalement, la propagation est non dispersive si :

$$\boxed{\Lambda G = \Gamma R}.$$

⚠ On vient de déterminer la condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas dispersion.

Exercice 3

1) Les plans conducteurs parfaits imposent à l'onde électromagnétique qui arrive sous incidence normale d'être totalement réfléchie. Le champ électrique est nul dans les conducteurs. Par continuité de sa composante tangentielle, cela impose les deux conditions aux limites suivantes :

$$\vec{E}(z=0,t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(z=2,t) = \vec{0}$$

à tout instant. De telles conditions invitent donc à rechercher $\vec{E}$ sous la forme d'une onde stationnaire :

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = Z(z)\,F(t)\,\vec{u}_z}$$

2) Entre les deux plans, le champ se propage dans le vide et vérifie donc l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \vec{0}, \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Ainsi :

$$Z(z)\,\ddot{F}(t) - c^2 Z''(z)\,F(t) = 0, \quad \text{soit :} \quad \frac{\ddot{F}(t)}{F(t)} = c^2\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

Les solutions physiquement acceptables sont de la forme :

$$F(t) = F_m\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad Z(z) = Z_m\cos(kz + \phi), \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\cos\phi = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL + \phi) = 0.$$

D'où, par exemple :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad kL + \phi = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ainsi :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{puis :} \quad \omega_n = k_n c.$$

Alors :

$$\vec{E}(x,t) = E_m\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\vec{u}_z$$

avec $E_m = F_m\,Z_m$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

c. On pose : $k = k' + jk''$.

• La vitesse de phase est : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$, soit :

$$v_\varphi = \omega\delta, \quad \text{ou encore :} \quad \boxed{v_\varphi = \sqrt{2a\omega}}\ .$$

• La vitesse de groupe est : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$, avec $\omega = 2ak'^2$, puis $\dfrac{d\omega}{dk'} = 4ak'$, soit :

$$\boxed{v_g = 2\sqrt{2a\omega} = 2v_\varphi}$$

Exercice 5

1) Les équations de couplage linéarisées, en ne prenant pas en compte la viscosité de l'air, sont :
– l'équation de conservation de la masse (1) :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0}\ .$$

– l'équation d'Euler (2) :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p}\ .$$

– l'équation d'évolution isentropique du fluide (3) :

$$\boxed{p = c^2 \rho}\ , \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\rho_0}\chi_S .$$

2) L'équation d'Euler est modifiée sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p + \eta \Delta \vec{v} \qquad \textbf{(2')}$$

Le terme supplémentaire $\eta\Delta\vec{v}$ est l'équivalent volumique de la résultante des forces de viscosité. Il traduit l'existence de frottements lorsque les molécules « glissent » les unes sur les autres. La loi proposée dans l'énoncée est linéaire.



Les fluides qui suivent cette loi sont dits newtoniens.

3) On a d'après (3) : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$, puis d'après (1) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}\right).$$

Enfin : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{div}\left(\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$, et d'après (2') :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{div}\left[-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p + \eta \Delta \vec{v}\right].$$

Avec $\operatorname{div}(\Delta\vec{v}) = \Delta(\operatorname{div}\vec{v})$, et $\operatorname{div}\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho_0 c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}$, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = \nu \frac{\partial}{\partial t}(\Delta p)}$$

où l'on introduit la viscosité cinématique $\nu = \dfrac{\eta}{\rho_0}$.

Copyrighted material

4) On se limite à la propagation d'ondes à une dimension. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^3 p}{\partial t \, \partial x^2}.$$

équation aux dérivées partielles linéaires. Avec, en représentation complexe :

$$\underline{p}(x,t) = p_m e^{j(\omega t - kx)}$$

on obtient la relation de dispersion suivante :

$$-\omega^2 + k^2 c^2 = -j\nu\omega k^2$$

soit :

$$k^2(c^2 + j\nu\omega) = \omega^2$$

puis :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1 + j\frac{\nu\omega}{c^2}}}.$$

⚠ Cette relation montre que k est en général complexe et dépend de manière non linéaire de ω. L'air visqueux se comporte donc comme un milieu dissipatif et dispersif.

En remarquant que $\frac{\nu\omega}{c^2}$ est sans unité, on peut poser $\tau = \frac{\nu}{c^2}$. Ainsi :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Avec : $k = k' - jk''$, on obtient :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \\ 2k'k'' = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} > 0 \end{cases}$$

et $|k|^2$ donne :

$$k'^2 + k''^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}.$$

Ainsi, en ne conservant que la solution propagative dans le sens des x croissants, on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} k'(\omega) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} + 1}{2\left(1 + (\omega\tau)^2\right)}} \\ k''(\omega) &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} - 1}{2\left(1 + (\omega\tau)^2\right)}} \end{aligned}}$$

5) L'expression réelle de la surpression est :

$$p(x,t) = \mathrm{Re}\left[p_m e^{-k''x} \, e^{j(\omega t - k'x)} \right]$$

Copyrighted material

soit :

$$p(x,t) = p_m e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x).$$

6) La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}, \quad \text{soit :} \quad v_\varphi = c\sqrt{\frac{2\left(1+(\omega\tau)^2\right)}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}+1}}$$

qui dépend clairement de ω.

7) Pour limiter l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation, il faut que $k''(\omega)$ soit le plus petit possible.

Si l'onde se propage sur une distance L, la condition est $k''L << 1$.

Avec $\omega\tau << 1$, on a, à l'ordre le plus bas en $(\omega\tau)$:

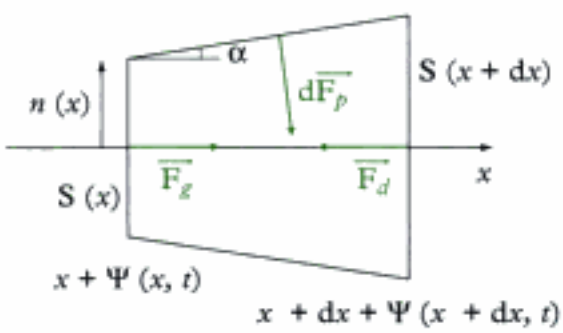
$$k'(\omega) \approx \frac{\omega}{c}$$
$$k''(\omega) \approx \frac{\omega}{c}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

La vitesse de phase est alors : $v_\varphi \approx c$. La propagation a lieu pratiquement sans atténuation et sans dispersion pourvu que l'on utilise des ondes sonores de basse fréquence (ultrasons tels que $\omega\tau << 1$).

Exercices de niveau 3

Exercice 6

1) a. Considérons, à l'instant t, la tranche de fluide soumise à des forces de pression de la part du fluide et de la part des parois du pavillon.



Entre x et $x + dx$, le pavillon peut être assimilé à un cône d'angle au sommet α. À l'ordre 1 en dx, le volume « initial » vaut alors $S(x)dx$.

On a :

$$\vec{F}_g = S(x)p_{totale}(x,t)\,\vec{u}_x$$
$$\vec{F}_d = -S(x+dx)p_{totale}(x+dx,t)\,\vec{u}_x$$
$$d\vec{F}_p = p_{totale}(x,t)\,dS_l \sin\alpha\,\vec{u}_x + d\vec{F}'_p$$

Copyrighted material

⚠ En toute rigueur, il faudrait considérer pour $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ les expressions en $x + \Psi(x,t)$ et $x + dx + \Psi(x + dx,t)$.

Dans l'expression de $d\vec{F}_p$, $d\vec{F}_p'$ est la contribution à $d\vec{F}_p$ non colinéaire à $\vec{u}_x$. dS_l représente la surface latérale donnée, à l'ordre 1, par :

$$dS_l = 2\pi r(x)\frac{x + dx + \psi(x + dx,t) - (x + \psi(x,t))}{\cos\alpha}$$

soit :

$$dS_l = \frac{2\pi r(x)}{\cos\alpha}\left[1 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx.$$

Avec $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| << 1$, il vient :

$$dS_l = \frac{2\pi}{\cos\alpha}r(x)dx.$$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe Ox, à la tranche de fluide, on obtient :

$$\rho_{totale}\,S(x)dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = S(x)\,p_{totale}(x,t) - S(x + dx)\,p_{totale}(x + dx,t) + 2\pi\tan\alpha\,p_{totale}(x,t)\,r(x)dx.$$

⚠ Comme le pavillon acoustique a une géométrie de révolution selon l'axe Ox, les forces de pression exercées par les parois sur le fluide selon l'axe Oy s'annulent.

Avec : $\rho_{totale} = \rho_0 + \rho$ et $p_{totale} = p_0 + p$, on a, à l'ordre 1 en dx :

$$\rho_{totale}\,S(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,p(x,t)] - p_0\frac{dS}{dx} + 2\pi(p_0 + p)\tan\alpha\,r(x).$$

On peut remarquer qu'en raison de la symétrie de révolution :

$$S(x) = \pi r^2(x), \text{ de sorte que } \frac{dS}{dx} = 2\pi r\frac{dr}{dx}.$$

De plus : $\tan\alpha = \frac{dr}{dx}$. Ainsi :

$$\rho_0 S(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,p(x,t)] - 2\pi p_0 r(x)\frac{dr}{dx} + 2\pi(p_0 + p)\,r(x)\frac{dr}{dx}.$$

Il reste alors :

$$\rho_0 S(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,p(x,t)] + p\frac{dS}{dx}.$$

soit encore : $\rho_0 S(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -S(x)\frac{\partial p}{\partial x}$.

D'où finalement :

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.}$$

On retrouve une équation semblable à celle associée à la propagation du son dans un milieu non limité, ou encore dans un cylindre.

Copyrighted material

Hidden page

qui donne :

$$-\chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\ln S}{dx}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - c^2\frac{d\ln S}{dx}\times\frac{\partial p}{\partial x} = 0}\ .$$

⚠ On constate que p et Ψ ne vérifient pas la même équation d'onde. Un terme en $\frac{d^2}{dx^2}(\ln S)$ vient s'ajouter dans l'équation en Ψ.

2) a. Avec $\ln S = \ln S_0 + ax$, on trouve :

$$\frac{d\ln S}{dx} = a \quad \text{et} \quad \frac{d^2\ln S}{dx^2} = 0\ .$$

Les équations d'onde pour Ψ et p sont alors identiques :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - ac^2\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - ac^2\frac{\partial p}{\partial x} = 0\end{aligned}}$$

b. Des solutions de type onde plane sont envisageables dans le cas de la propagation d'ondes dans un milieu infini ou dans un tuyau de section constante.
Dans le cas d'un pavillon exponentiel, on devrait plutôt envisager des solutions de type **onde sphérique**. Il faudrait alors reprendre la mise en équation du problème depuis le début en raisonnant sur des tranches de fluide sphériques.
Toutefois, si le pavillon est peu évasé, la recherche de solutions de type onde plane peut constituer une approximation suffisante.

c. Avec $\underline{\Psi}(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)}$, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$-\omega^2 + k^2c^2 + jkac^2 = 0, \quad \text{soit :} \quad \boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + jka}$$

En recherchant k sous forme complexe, on doit résoudre une équation du second degré à coefficients complexes. On a :

$$(kc)^2 + jac(kc) - \omega^2 = 0$$

de discriminant : $\Delta = -(ac)^2 + 4\omega^2$.

– Si $\omega > \frac{ac}{2}$, on a alors :

$$k = -j\frac{a}{2} \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}\ .$$

où l'on a introduit la pulsation $\omega_c = \frac{ac}{2}$. Cette dernière joue le rôle d'une **pulsation de coupure**.

– Pour $\omega < \omega_c$, k est imaginaire pur. Aucune onde de pulsation $\omega < \omega_c$ ne peut donc se propager dans le pavillon.

En effet, les variables spatiale et temporelle sont alors découplées. Par analogie avec le vocabulaire de l'électrocinétique, on pourrait qualifier le pavillon de filtre passe-haut dans le sens où seules les hautes fréquences ($f > f_c$) peuvent se propager.

Copyrighted material

Finalement :

$$\text{– si } \omega > \omega_c : \; k = -j\frac{\omega_c}{2c} \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{– si } \omega < \omega_c : \; k = -j\left(\frac{\omega_c}{2c} \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1}\right)$$

d. Quand il y a propagation, on peut définir la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}[k]} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}}$$

⚠ On ne conserve que la racine qui assure la propagation dans le sens des x croissants, c'est-à-dire celle dont la partie réelle est positive.

Cette vitesse dépend de ω. La propagation est dispersive.

Avec $v_g = \dfrac{d\omega}{d(\mathrm{Re}[k])}$, on calcule :

$$\frac{d(\mathrm{Re}[k])}{d\omega} = \frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}},$$

On peut remarquer que $v_\varphi v_g = c^2$. v_φ est supérieure à c ; v_g est inférieure à c.

Exercice 7

1) a. Le milieu 2 étant un conducteur parfait, les champs $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$ y sont nécessairement nuls. Donc :

$$\boxed{\vec{E}_2 = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_2 = \vec{0}}$$

en tout point du conducteur, à tout instant.

b. Dans le milieu 1 (vide), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{(i)} \quad \mathrm{div}\vec{E}_1 = 0 \qquad \text{(iii)} \quad \mathrm{div}\vec{B}_1 = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \qquad \text{(iv)} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}_1 = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

c. Ces équations aux dérivées partielles sont linéaires. En adoptant la représentation complexe proposée dans l'énoncé, on obtient :

$$\mathrm{div}\vec{E}_1 = e^{j(\omega t - kx)}\left[\mathrm{div}\vec{F}_1 - jk\vec{u}_x \cdot \vec{F}_1\right]$$

$$\mathrm{div}\vec{B}_1 = e^{j(\omega t - kx)}\left[\mathrm{div}\vec{G}_1 - jk\vec{u}_x \cdot \vec{G}_1\right]$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}_1 = e^{j(\omega t - kx)}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}_1 - jk\vec{u}_x \wedge \vec{F}_1\right]$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}_1 = e^{j(\omega t - kx)}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{G}_1 - jk\vec{u}_x \wedge \vec{G}_1\right]$$

$$\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = j\omega\vec{E}_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = j\omega\vec{B}_1$$

Copyrighted material

D'où :

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \Rightarrow && \operatorname{div}\vec{\mathrm{F}}_1 - jk\vec{u}_x \cdot \vec{\mathrm{F}}_1 = 0 \\
&\text{(iii)} \Rightarrow && \operatorname{div}\vec{\mathrm{G}}_1 - jk\vec{u}_x \cdot \vec{\mathrm{G}}_1 = 0 \\
&\text{(ii)} \Rightarrow && \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{\mathrm{F}}_1 - jk\vec{u}_x \wedge \vec{\mathrm{F}}_1 = -j\omega\vec{\mathrm{G}}_1 \\
&\text{(iv)} \Rightarrow && \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{\mathrm{G}}_1 - jk\vec{u}_x \wedge \vec{\mathrm{G}}_1 = j\frac{\omega}{c^2}\vec{\mathrm{F}}_1
\end{aligned}$$

avec $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

d. Dans une base cartésienne, les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases}
\textbf{(1)} & \mathrm{F}'_{1,z} - jk\mathrm{F}_{1,x} = 0 \\
\textbf{(2)} & \mathrm{G}'_{1,z} - jk\mathrm{G}_{1,x} = 0 \\
\textbf{(3)} & \mathrm{F}'_{1,x}\vec{u}_y - \mathrm{F}'_{1,y}\vec{u}_x - jk\left(\mathrm{F}_{1,y}\vec{u}_z - \mathrm{F}_{1,z}\vec{u}_y\right) = -j\omega\vec{\mathrm{G}}_1 \\
\textbf{(4)} & \mathrm{G}'_{1,x}\vec{u}_y - \mathrm{G}'_{1,y}\vec{u}_x - jk\left(\mathrm{G}_{1,y}\vec{u}_z - \mathrm{G}_{1,z}\vec{u}_y\right) = j\frac{\omega}{c^2}\vec{\mathrm{F}}_1
\end{cases}$$

Si, en outre, $\mathrm{F}_{1,x} = 0$ et $\mathrm{G}_{1,x} = 0$, il reste :

$$\begin{cases}
\textbf{(1)} \Rightarrow & \mathrm{F}'_{1,z} = 0 \\
\textbf{(2)} \Rightarrow & \mathrm{G}'_{1,z} = 0 \\
\textbf{(3)} \Rightarrow & \begin{cases} \mathrm{F}'_{1,y} = 0 \\ jk\mathrm{F}_{1,z} = -j\omega\mathrm{G}_{1,y} \\ -jk\mathrm{F}_{1,y} = -j\omega\mathrm{G}_{1,z} \end{cases} \\
\textbf{(4)} \Rightarrow & \begin{cases} \mathrm{G}'_{1,y} = 0 \\ jk\mathrm{G}_{1,z} = j\dfrac{\omega}{c^2}\mathrm{F}_{1,y} \\ -jk\mathrm{G}_{1,y} = j\dfrac{\omega}{c^2}\mathrm{F}_{1,z} \end{cases}
\end{cases}$$

Finalement, toutes les composantes des vecteurs $\vec{\mathrm{F}}_1$ et $\vec{\mathrm{G}}_1$ sont constantes avec $\mathrm{F}_{1,x} = 0$ et $\mathrm{G}_{1,x} = 0$, d'après les quatre équations avec second membre nul.

Les quatre équations de couplage des composantes de $\vec{\mathrm{F}}_1$ et $\vec{\mathrm{G}}_1$ ne peuvent être vérifiées que si ω et k vérifient une relation de compatibilité : la relation de dispersion. Ainsi, avec :

$$k\mathrm{F}_{1,z} = -\omega\mathrm{G}_{1,y} \quad \text{et} \quad k\mathrm{G}_{1,y} = -\frac{\omega}{c^2}\mathrm{F}_{1,z}$$

il vient :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{ou encore :} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

en ne retenant que la solution positive, l'autre solution devant être rejetée.

⚠ On trouverait évidemment la même relation de dispersion en considérant les équations liant $\mathrm{F}_{1,y}$ et $\mathrm{G}_{1,z}$.

Copyrighted material

e. La vitesse de phase est alors :

$$v_\varphi = c$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = c.$$

La propagation de l'onde TEM se fait sans dispersion et sans atténuation. Le plan conducteur ne perturbe pas la propagation de l'onde.

f. • On déduit alors facilement :

$$F_{1,y} = \frac{\omega}{k} G_{1,z}$$

$$G_{1,y} = -\frac{k}{\omega} F_{1,z}$$

soit, en utilisant la relation de dispersion :

$$F_{1,y} = c\,G_{1,z} \quad \text{et} \quad G_{1,y} = -\frac{1}{c} F_{1,z}.$$

• Pour exprimer toutes les composantes en fonction de $F_{1,z}$, il faut une information supplémentaire. C'est la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, en $x = 0$, qui la donne sous la forme :

$$\begin{cases} E_{1,z}(x=0,t) = E_{2,z}(x=0,t) \\ E_{1,y}(x=0,t) = E_{2,y}(x=0,t) \end{cases}$$

Puisque $\vec{E}_2 = \vec{0}$, il vient finalement :

$$F_{1,z} = 0 \quad \text{et} \quad F_{1,y} = 0.$$

D'où : $G_{1,z} = 0$ et $G_{1,y} = -\frac{1}{c} F_{1,z}$.

Finalement, on a, pour tout z :

$F_{1,x}(z) = 0$	$G_{1,x}(z) = 0$
$F_{1,y}(z) = 0$	$G_{1,y}(z) = -\frac{1}{c} F_{1,z}(z)$
$F_{1,z}(z) = \text{cte}$	$G_{1,z}(z) = 0$

On peut donc écrire les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$ sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = F_{1,z} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z \\ \vec{B}_1 = -\frac{1}{c} F_{1,z} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y \end{cases}$$

g. La condition de passage de la composante tangentielle $\vec{B}_T$ des champs magnétiques s'écrit :

$$\vec{B}_{1T} - \vec{B}_{2T} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_x.$$

Or $\vec{B}_{2T} = \vec{0}$. D'où la densité de courant surfacique :

$$\vec{j}_S = \varepsilon_0 c F_{1,z} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y.$$

Le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ possède *a priori* une composante suivant $\vec{u}_x$ et une composante suivant $\vec{u}_y$. Comme le champ magnétique $\vec{B}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_y$, la composante de $\vec{j}_S$ suivant ce vecteur est nulle.

Copyrighted material

2) a. Le conducteur a à présent une conductivité finie. Il existe dans le milieu une densité de courant $\vec{j}_2 = \gamma \vec{E}_2$. L'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_2 = 0$$

associée à l'équation de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E}_2 = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$$

donne alors :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho_2 = 0 .$$

Cette équation admet une solution exponentielle décroissante :

$$\rho_2 = A\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec un temps caractéristique de décroissance :

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} .$$

Dans un conducteur, ce temps est généralement très faible. Avec la valeur $\gamma = 4{,}4\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ proposée à la question 2.d pour l'eau, on a :

$$\tau = 2 \cdot 10^{-12}\ s .$$

On peut donc raisonnablement estimer que la densité de charges est pratiquement nulle dans le conducteur :

$$\boxed{\rho_2 = 0} .$$

b. Les équations de Maxwell dans le conducteur :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_2 = -\dfrac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}_2 = \mu_0 \left(\gamma \vec{E}_2 + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \right) \end{cases}$$

donnent alors :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_2 \right) = \begin{cases} -\Delta \vec{E}_2 & \text{puisque } \operatorname{div} \vec{E}_2 = 0 \\ -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \vec{E}_2 + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} \right) \end{cases}$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E}_2 = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t}}$$

L'équation étant linéaire, on peut adopter une représentation complexe et rechercher une solution en régime sinusoïdal permanent sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \vec{E}_{2m} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} .$$

On obtient alors la relation de dispersion :

$$-\omega^2 + k^2 c^2 = -j \frac{\gamma \omega}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{k^2 c^2 = \omega^2 - j \frac{\gamma \omega}{\varepsilon_0}}$$

Copyright Material

Le vecteur d'onde est à présent complexe. On peut l'écrire sous la forme :

$$k = k' - jk''.$$


On exprime k^2 en fonction de k'^2 et k''^2, puis $|k|^2$. On peut alors en déduire k'^2 et k''^2.

On trouve alors :

$$k''^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[\sqrt{1+\alpha^2} - 1\right], \text{ en posant } \alpha = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega}.$$

Le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}_2 = \vec{E}_{2m} e^{-k''\vec{u}\cdot\vec{r}} e^{j(\omega t - k'\vec{u}\cdot\vec{r})},$$

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire de la direction de propagation. $\frac{1}{k''}$ est homogène à une distance. Elle définit une profondeur de pénétration caractéristique de l'onde :

$$\delta = \frac{1}{k''}.$$

c. Dans le domaine de fréquence 100 Hz – 1 000 Hz, α prend des valeurs dans le domaine :

$$8 \cdot 10^7 \leqslant \alpha \leqslant 8 \cdot 10^8.$$

On a donc $\alpha >> 1$, si bien que :

$$k''^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\alpha$$

puis : $\delta = \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$, soit :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}.$$

Numériquement, on trouve :

$$7{,}5 \text{ m} \leqslant \delta \leqslant 24 \text{ m}.$$

Les SNLE restant en général au fond des océans, ils ne peuvent capter les ondes VLF que s'ils **remontent à la surface**.

Exercice 8

1) a. Chaque charge q contenue dans le plasma est soumise à une force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right),$$

où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique de l'onde. On peut comparer les effets magnétique et électrique en donnant un ordre de grandeur du rapport :

$$\frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} = \frac{Bv}{E}.$$

Pour une onde électromagnétique, on a, dans le vide : $E = cB$, c étant la vitesse de la lumière. Ainsi :

$$\frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} = \frac{v}{c} << 1$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Voir les exercices 2 et 4 du chapitre 3.

En utilisant les propriétés de telles ondes dans les relations donnant $\underline{v}_x$ et $\underline{v}_y$ à la question précédente, on peut écrire :

$$\underline{v}_{x,G} = \frac{e}{m}\frac{j\omega\underline{E}_{x,G} - \omega_c\underline{E}_{y,G}}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

soit :

$$\underline{v}_{x,G} = \frac{e}{m}\frac{j(\omega - \omega_c)}{\omega^2 - \omega_c^2}\underline{E}_{x,G}$$

ou encore :

$$\boxed{\underline{v}_{x,G} = j\frac{e}{m}\frac{\underline{E}_{x,G}}{\omega + \omega_c}}.$$

En procédant de la même façon avec $\underline{v}_{y,G}$, on obtient :

$$\boxed{\underline{v}_{y,G} = j\frac{e}{m}\frac{\underline{E}_{y,G}}{\omega + \omega_c}}.$$

Finalement, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v}_G = j\frac{e}{m}\frac{\vec{\underline{E}}_G}{\omega + \omega_c}}.$$

En reprenant les calculs avec la polarisation circulaire droite, on trouve :

$$\boxed{\vec{v}_D = j\frac{e}{m}\frac{\vec{\underline{E}}_D}{\omega - \omega_c}}.$$

On peut à présent définir les densités de courant :

$$\vec{\underline{j}}_G = -n\,e\,\vec{\underline{v}}_G \quad \text{et} \quad \vec{\underline{j}}_D = -n\,e\,\vec{\underline{v}}_D,$$

qui s'écrivent :

$$\vec{\underline{j}}_G = -j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega + \omega_c}\vec{\underline{E}}_G \quad \text{et} \quad \vec{\underline{j}}_D = -j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega - \omega_c}\vec{\underline{E}}_D.$$

On retrouve des relations vectorielles simples de la forme $\vec{\underline{j}} = \underline{\sigma}\vec{\underline{E}}$ qui permettent de définir les conductivités :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\sigma}_G &= -j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega + \omega_c}\\ \underline{\sigma}_D &= -j\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega - \omega_c}\end{aligned}}$$

Mathématiquement, nous avons procédé à un changement de base dans laquelle la représentation matricielle du tenseur de conductivité est diagonale.

iv) Les relations de dispersions sont de la forme :

$$k^2c^2 = \omega^2 - j\frac{\omega}{\varepsilon_0}\underline{\sigma},$$

Copyrighted material

expression établie à la question 1.d. Ainsi :

$$k_G^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega}{\omega + \omega_c} \quad \text{et} \quad k_D^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\omega}{\omega - \omega_c}.$$

D'où :

$$k_G^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2 \frac{\omega}{\omega_c + \omega}\right]$$

$$k_D^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2 \frac{\omega}{\omega_c - \omega}\right]$$

Pour $\omega < \omega_c$, $k_D^2 > 0$, si bien que k_D est réel. L'onde circulaire droite se propage toujours. Si on a $\omega << \omega_c << \omega_p$, on peut écrire :

$$k_G^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 - \frac{\omega_p}{c} \times \frac{\omega_p}{\omega}\right]$$

Or $\frac{\omega_p}{\omega_c} \times \frac{\omega_p}{\omega} >> 1$, de sorte que $k_G^2 < 0$; k_G est imaginaire pur. L'onde circulaire gauche est évanescente et ne se propage plus.

L'onde incidente, initialement polarisée rectilignement, est ainsi transformée en une onde **polarisée circulairement**.

Copyrighted material

Hidden page

A. Milieu diélectrique

A.1. Charges libres - charges liées

Si on néglige leurs propriétés magnétiques, les milieux matériels peuvent schématiquement être classés en deux catégories : les conducteurs et les diélectriques, aussi appelés isolants.

A.1.1. Matériau conducteur

Dans un conducteur, des charges électriques sont **libres** de se déplacer dans le matériau. Dans les métaux, ces charges sont des électrons des couches externes des atomes qui forment un gaz d'électrons libres. Dans les électrolytes, ce sont des ions. Dans les plasmas[1], ces sont des électrons et des cations présents dans le milieu.

1. On rappelle que les plasmas sont des gaz ionisés.

Tous ces milieux sont caractérisés par une **conductivité électrique**. C'est dans les métaux qu'elle est la plus élevée en raison du grand nombre d'électrons libres. Dans les électrolytes, elle est plus faible, les ions se déplaçant dans un solvant. Dans les plasmas, la conductivité électrique est également plus faible que dans les métaux ; elle est essentiellement liée au mouvement des électrons, les cations beaucoup plus lourds étant moins mobiles.

A.1.2. Matériau diélectrique

Dans un diélectrique, il n'existe pas de charges électriques libres, mais des **charges liées** qui peuvent s'écarter légèrement de leur position d'équilibre[2]. Ces charges appartiennent aux atomes ou molécules qui constituent le diélectrique. Lorsque le diélectrique est plongé dans un champ électrique $\vec{E}$, le déplacement des charges crée localement des moments dipolaires là où il n'y en avait pas, ou modifie l'orientation des moments dipolaires déjà existants.

2. Autour de la position d'équilibre, les déplacements sont de l'ordre de l'angström (1 A = 10^{-10} m).

On dit que le milieu se polarise ; on parle de **polarisation électronique** (déformation des nuages électroniques et déplacement du noyau atomique) ou de **polarisation ionique** (dans le cas des cristaux) pour les milieux non polaires, de **polarisation d'orientation** pour les milieux polaires. La polarisation de la matière peut être caractérisée de manière équivalente par une distribution de moments dipolaires répartis dans tout le matériau ou par les déplacements des charges liées.

A.2. Vecteur polarisation

Les équations (i) et (iv) de Maxwell prennent en compte les propriétés des milieux par l'intermédiaire des densités volumiques de charges et de courant :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{(iv)} \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Ces grandeurs locales ne sont pas définies au niveau microscopique. Ce sont des moyennes prises à une échelle mésoscopique[3] grande devant la distance qui sépare les charges, mais petite devant la distance sur laquelle varient les propriétés du matériau. Les densités ρ et $\vec{j}$ sont ainsi des grandeurs nivelées, fonctions continues de l'espace et du temps.

3. De l'ordre de quelques centaines de nanomètres.

La description d'un milieu diélectrique peut se faire de la même façon. En désignant par D l'échelle de définition des grandeurs moyennes, si le volume D^3

Copyrighted material

contient en moyenne N moments dipolaires, on définit une densité de moments dipolaires contenus dans le volume $V = D^3$ par :

$$\frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_i = \frac{N}{D^3} < \vec{p} >_i ,$$

où $< . >_i$ désigne une valeur moyenne spatiale, la somme portant sur tous les moments dipolaires contenus dans le volume V (fig.1).

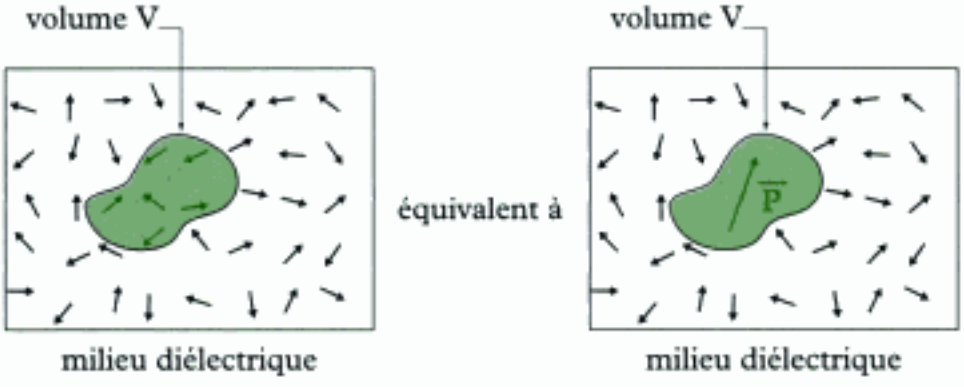


Fig. 1 - Vecteur polarisation.

Définition 1

Le **vecteur polarisation** du milieu, noté $\vec{P}$, est une grandeur vectorielle locale nivelée qui varie continûment dans l'espace et dans le temps :

$$\vec{P} = n < \vec{p} >_i$$

n densité volumique de dipôles (m^{-3})
$< \vec{p} >_i$ moment dipolaire moyen ($C \cdot m$)
$\vec{P}$ vecteur polarisation ($C \cdot m^{-2}$)

A.3. Densité de courants liés

Considérons des charges individuelles q_i dans un volume mésoscopique V de l'espace. Plongées dans un champ électrique excitateur, ces charges sont mises en mouvement à la vitesse $\vec{v}_i$. Elles sont alors à l'origine d'un courant moyen de densité volumique :

$$\frac{1}{V}\sum_i q_i \vec{v}_i .$$

Dans un milieu diélectrique, le même phénomène est observé avec les charges liées, le produit $q_i \vec{v}_i$ étant remplacé par la variation d'un moment dipolaire $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$.

La densité de courants est alors appelée densité volumique de courants liés :

$$\vec{j}_{liés} = \frac{1}{V}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt},$$

qui peut encore s'écrire, en reprenant la notation de la valeur moyenne spatiale :

$$\vec{j}_{liés} = n\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle_i$$

Copyrighted material

On a ainsi établi une relation entre le mouvement des charges liées et le vecteur polarisation $\vec{P}$.

Propriété 1

Dans un milieu diélectrique de vecteur polarisation $\vec{P}$, il existe des courants de polarisation microscopiques caractérisés au niveau mésoscopique par **la densité volumique de courants liés** :

$$\vec{j}_{liés} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

A.4. Densité de charges liées

Dans tout milieu matériel électriquement neutre, la conservation de la charge doit être assurée. En régime variable, cette propriété est traduite par la relation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\,\vec{j} = 0.$$

Dans un milieu diélectrique où seuls existent des charges et des courants liés, cette relation devient :

$$\frac{\partial \rho_{liés}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) = 0, \quad \text{soit :} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{liés} + \mathrm{div}\,\vec{P}\right) = 0.$$

Propriété 2

Dans un milieu diélectrique de vecteur polarisation $\vec{P}$, il existe des courants de polarisation microscopiques caractérisés au niveau mésoscopique par **la densité volumique de charges liées** :

$$\rho_{liés} = -\mathbf{div}\,\vec{P}.$$

A.5. Équations de Maxwell dans un diélectrique

Dans un milieu diélectrique dénué de propriétés magnétiques et dans lequel n'existe aucune charge libre, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho_{liés}}{\varepsilon_0} \\ \text{(ii)} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} & \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{liés} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

En tenant compte des expressions des densités de courants et charges liés, ces équations prennent la forme :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \Rightarrow & \mathbf{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = 0 \\ \text{(ii)} & \Rightarrow & \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} & \Rightarrow & \mathbf{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} & \Rightarrow & \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \dfrac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}{\partial t} \end{cases}$$

Copyrighted material

Pour connaître les propriétés du champ électromagnétique dans le diélectrique, une information supplémentaire liée à la nature du milieu est nécessaire. Cette information est apportée par la relation constitutive du milieu entre la polarisation $\vec{P}$ et le champ électrique $\vec{E}$. Cette relation est en général compliquée, mais le problème se simplifie si le milieu présente un comportement linéaire.

A.6. Diélectrique Linéaire Homogène Isotrope (DLHI)

En régime harmonique permanent de pulsation ω, un milieu est dit **linéaire** si la relation entre le vecteur polarisation et le champ électrique est linéaire en chacune des coordonnées d'espace. Cette propriété s'exprime en représentation complexe sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{P}_x(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_{xx} \underline{E}_x(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{xy} \underline{E}_y(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{xz} \underline{E}_z(M,t) \\ \underline{P}_y(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_{yx} \underline{E}_x(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{yy} \underline{E}_y(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{yz} \underline{E}_z(M,t) \\ \underline{P}_z(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_{zx} \underline{E}_x(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{zy} \underline{E}_y(M,t) + \varepsilon_0 \underline{\chi}_{zz} \underline{E}_z(M,t) \end{cases}$$

où l'on introduit le **tenseur de susceptibilité diélectrique** $\underline{\chi}$, représenté par une matrice 3×3. Chaque terme de ce tenseur dépend de la pulsation ω du régime harmonique, mais aussi du point M de l'espace.

Si le milieu est **homogène**, alors ce tenseur est indépendant du point M[4]. Si le milieu, en outre, est **isotrope**, ses propriétés ne dépendent pas de la direction[5], et la relation entre la polarisation $\vec{P}$ et le champ électrique $\vec{E}$ s'écrit plus simplement :

$$\underline{\vec{P}}(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \underline{\vec{E}}(M,t) .$$

4. Cela signifie que le tenseur prend la même valeur en tout point de l'espace.

5. Cela signifie que les termes diagonaux du tenseur sont égaux, les autres termes étant nuls.

Propriété 3

Pour un **diélectrique linéaire, homogène et isotrope (DLHI)** en régime harmonique de pulsation ω, la relation constitutive du milieu s'écrit, en représentation complexe :

$$\underline{\vec{P}}(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \underline{\vec{E}}(M,t) ,$$

où la susceptibilité $\underline{\chi}$ est seulement fonction de la pulsation ω.

A.7. Cas des milieux dilués

A.7.1. Expression de la susceptibilité

Les milieux dilués tels que les gaz se comportent comme des DLHI peu denses. Le modèle de l'électron élastiquement lié[6] permet simplement de rendre compte de ce comportement. Chaque électron des atomes du milieu est traité de manière indépendante. Pour une OPPH de pulsation ω, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron donne :

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E}(t) - m\omega_0^2 \vec{r} - m\frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} \quad \text{avec} \quad \vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t) .$$

6. Ce modèle a été introduit au chapitre 3 dans le cadre de l'étude de la diffusion Rayleigh. Il est ici utilisé sans rappel. Il peut être utile de relire le paragraphe qui s'y rapporte.

En raison de la linéarité de l'équation, on peut écrire, en représentation complexe, le champ électrique $\underline{\vec{E}}(t) = \vec{E}_m e^{j\omega t}$ et le vecteur $\underline{\vec{r}}(t) = \underline{\vec{r}}_m e^{j\omega t}$. On en déduit la relation :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)\underline{\vec{r}}(t) = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}(t) .$$

Copyrighted material

Le moment dipolaire induit par le passage de l'onde est alors :

$$\underline{\vec{p}}(t) = -e\,\underline{\vec{r}} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}\,\underline{\vec{E}}(t)\,.$$

Enfin, en notant n_e la densité volumique d'électrons liés dans le milieu, on obtient le vecteur polarisation en représentation complexe :

$$\underline{\vec{P}}(t) = n_e\,\underline{\vec{p}}(t) = \frac{n_e e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}}\,\underline{\vec{E}}(t)\,.$$

La relation $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi}\,\underline{\vec{E}}$ constitutive du DLHI permet de déterminer l'expression de la susceptibilité diélectrique dans ce modèle :

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\dfrac{\omega_0\omega}{Q}},$$

où l'on a introduit la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}}$. En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $\chi_m = \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$, on obtient finalement[7] :

$$\boxed{\underline{\chi}(\omega) = \frac{\chi_m}{1 - x^2 - j\dfrac{x}{Q}}}\,.$$[8]

7. La pulsation propre ω_0 est de l'ordre de 10^{15} rad·s^{-1} et le facteur de qualité Q de l'ordre de 10^3. En assimilant le milieu dilué à un gaz parfait, et dans les conditions usuelles de température et de pression ($T \simeq 300$ K et $p \simeq 10^5$ Pa), n_e est de l'ordre de 10^{25} m^{-3}. La pulsation ω_p est alors de l'ordre de 10^{14} rad·s^{-1}, et χ_m est de l'ordre de 10^{-4}.

8. L'expression de la susceptibilité complexe ne prend en compte qu'un seul type d'électrons caractérisé par la pulsation propre ω_0. En général, il y a plusieurs types d'électrons liés. La susceptibilité est la somme des contributions de chacun de ces types. La relation établie se généralise alors sous la forme :

$$\underline{\chi}(\omega) = \sum_i \frac{\chi_{m,i}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_{0,i}}\right)^2 - j\dfrac{\omega}{\omega_{0,i}Q_i}}$$

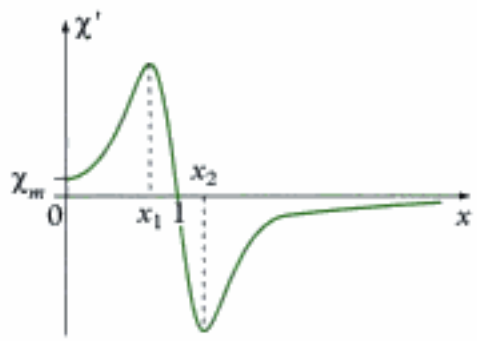
Ainsi généralisée, cette expression rend compte en particulier des différents domaines d'absorption par la matière.

A.7.2. Étude de la susceptibilité

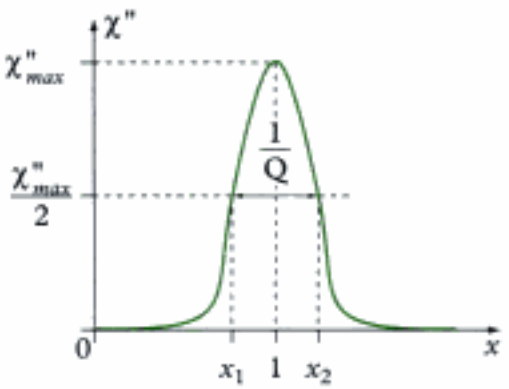
On déduit les parties réelle $\chi' = \mathrm{Re}[\underline{\chi}]$ et imaginaire $\chi'' = \mathrm{Im}[\underline{\chi}]$ de la susceptibilité complexe :

$$\chi'(\omega) = \frac{1 - x^2}{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}\chi_m \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \frac{\dfrac{x}{Q}}{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}\chi_m\,.$$

Avec ces relations, on constate que la susceptibilité diélectrique qui caractérise la réponse du milieu à l'excitation d'un champ extérieur dépend fortement de la fréquence. La figure 2, en excellent accord avec les résultats expérimentaux, rend compte de cette dépendance.



Évolution de la partie réelle



Évolution de la partie imaginaire

Fig. 2 - Étude de la susceptibilité diélectrique ($Q \gg 1$).

Copyrighted material

• La partie réelle χ' s'annule en $x = 1$ et tend vers 0 en l'infini. Pour $Q \gg 1$, χ' admet un maximum en $x_1 = 1 - \frac{1}{2Q}$ et un minimum en $x_2 = 1 + \frac{1}{2Q}$. χ' varie beaucoup dans $[x_1, x_2]$, peu en dehors de cet intervalle.

• La partie imaginaire χ'' présente également des variations importantes dans $[x_1, x_2]$. La différence $x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$ est la largeur à mi-hauteur de la courbe.

En raison des variations importantes de la partie réelle χ' et de la partie imaginaire χ'' dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, celui-ci est appelé **zone d'absorption**. Le domaine situé à l'extérieur de l'intervalle $[x_1, x_2]$ est appelé **zone de transparence**[9].

9. Nous donnerons un sens à ces expressions après avoir déterminé la relation de dispersion dans un DLHI dans lequel se propage une OPPH.

B. Propagation d'une OPPH dans un DLHI

B.1. Équations de couplage

L'évolution du champ électromagnétique dans un DLHI non magnétique est obtenue grâce aux équations de Maxwell écrites au § A.5. et à la relation constitutive du milieu. Toutes ces équations étant linéaires à coefficients constants, on peut décrire la propagation d'une OPPH dans le diélectrique en représentation complexe. Ainsi, les équations de couplage s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \Rightarrow & -j\vec{\underline{k}} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{\underline{E}} + \vec{\underline{P}}\right) = 0 \\ \text{(ii)} & \Rightarrow & -j\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} = -j\omega \vec{\underline{B}} \\ \text{(iii)} & \Rightarrow & -j\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{B}} = 0 \\ \text{(iv)} & \Rightarrow & -j\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{B}} = j\mu_0\omega\left(\varepsilon_0 \vec{\underline{E}} + \vec{\underline{P}}\right) \end{cases} \quad \text{avec } \vec{\underline{P}}(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi} \vec{\underline{E}}(M,t).$$

En éliminant le vecteur polarisation entre les équations, et en notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction de propagation, il reste finalement[10] :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \Rightarrow & \vec{u} \cdot \vec{\underline{E}} = 0 \\ \text{(ii)} & \Rightarrow & \underline{k}\vec{u} \wedge \vec{\underline{E}} = \omega \vec{\underline{B}} \\ \text{(iii)} & \Rightarrow & \vec{u} \cdot \vec{\underline{B}} = 0 \\ \text{(iv)} & \Rightarrow & -\underline{k}\vec{u} \wedge \vec{\underline{B}} = \frac{\omega}{c^2}\left(1 + \underline{\chi}\right)\vec{\underline{E}} \end{cases}$$

10. Dans ces équations, le vecteur d'onde $\underline{k}$ et la susceptibilité $\underline{\chi}$ dépendent de la pulsation ω de l'OPPH.

où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ désigne la célérité de la lumière dans le vide.

B.2. Structure des ondes

En prenant la partie réelle des équations (i) et (iii), on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{B} = 0.$$

Les champs électrique et magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation. L'OPPH qui se propage dans le DLHI est **transversale**.

Copyrighted material

Cependant, le vecteur d'onde étant *a priori* complexe, la relation :

$$\vec{\underline{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega}\vec{u} \wedge \vec{\underline{E}}$$

montre que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne vibrent pas nécessairement en phase[11].

11. Dans le vide, les champs électrique et magnétique vibrent toujours en phase.

B.3. Relation de dispersion

En injectant (ii) dans (iv), on obtient :

$$-\underline{k}\vec{u} \wedge \left(\frac{\underline{k}}{\omega}\vec{u} \wedge \vec{\underline{E}}\right) = \frac{\omega}{c^2}\left(1+\underline{\chi}\right)\vec{\underline{E}}$$

d'où la relation de dispersion[12] :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\underline{\chi}\right)}.$$

12. La relation de dispersion est la condition de compatibilité des équations de Maxwell.

Pour dégager le contenu physique de cette relation, on décompose le vecteur d'onde $\underline{k}$ en sa partie réelle k' et sa partie imaginaire k'', solutions du système de deux équations à deux inconnues[13] :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1+\mathrm{Re}\left[\underline{\chi}\right]\right) \\ 2k'k'' = \dfrac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}\left[\underline{\chi}\right] \end{cases}$$

13. Nous laissons au lecteur le soin de mener les calculs à leur terme pour déterminer les expressions de k' et k''.

En représentation complexe, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{\underline{E}} = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} e^{j(\omega t - k'(\omega)z)},$$

soit en représentation réelle : $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{\underline{E}}\right] = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z}\cos\left(\omega t - k'(\omega)z\right)$.

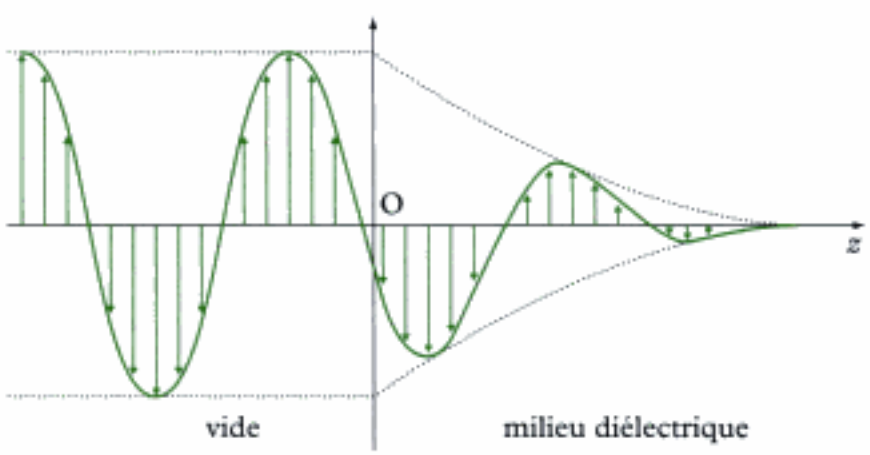


Fig. 3 - Évolution du champ électrique dans un diélectrique (cas d'une polarisation rectiligne).

On retrouve la présence d'un terme exponentiel caractéristique d'une absorption ($k'' < 0$) par le milieu au cours de la propagation de l'onde (fig. 3). En outre, k' dépendant de la pulsation ω de façon non linéaire, la propagation s'accompagne d'un phénomène de dispersion. Un paquet d'ondes se propage donc dans un DLHI en se déformant avec une amplitude qui décroît.

Copyrighted material

Hidden page

Remarque

Si on note $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ le vecteur d'onde dans le vide pour une OPPH de pulsation ω donnée, on peut introduire les longueurs d'onde λ_0 dans le vide et $\lambda(\omega)$ dans le DLHI par :

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad k'(\omega) = n'(\omega) k_0 = \frac{2\pi}{\lambda(\omega)},$$

d'où la relation entre les longueurs d'onde :

$$\lambda(\omega) = \frac{\lambda_0}{n'(\omega)}.$$

Cette relation montre que la longueur d'onde dépend du milieu dans lequel l'onde se propage. En revanche, la fréquence est une grandeur intrinsèque de l'onde[17] :

$$\nu = \frac{v_\varphi(\omega)}{\lambda(\omega)} = \frac{c}{n'(\omega)} \times \frac{n'(\omega)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} = \nu_0.$$

17. En conséquence, on retrouve le fait que la fréquence d'une onde reste constante lorsque l'onde passe d'un milieu 1 à un milieu 2 d'indice optique différent, alors que sa longueur d'onde change.

B.5. Cas des milieux dilués

• Reprenons le modèle de l'électron élastiquement lié. Nous avons établi au § A.6. l'expression de la susceptibilité complexe du milieu :

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\chi_m}{1 - x^2 - j\dfrac{x}{Q}}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

La permittivité relative complexe du milieu s'en déduit :

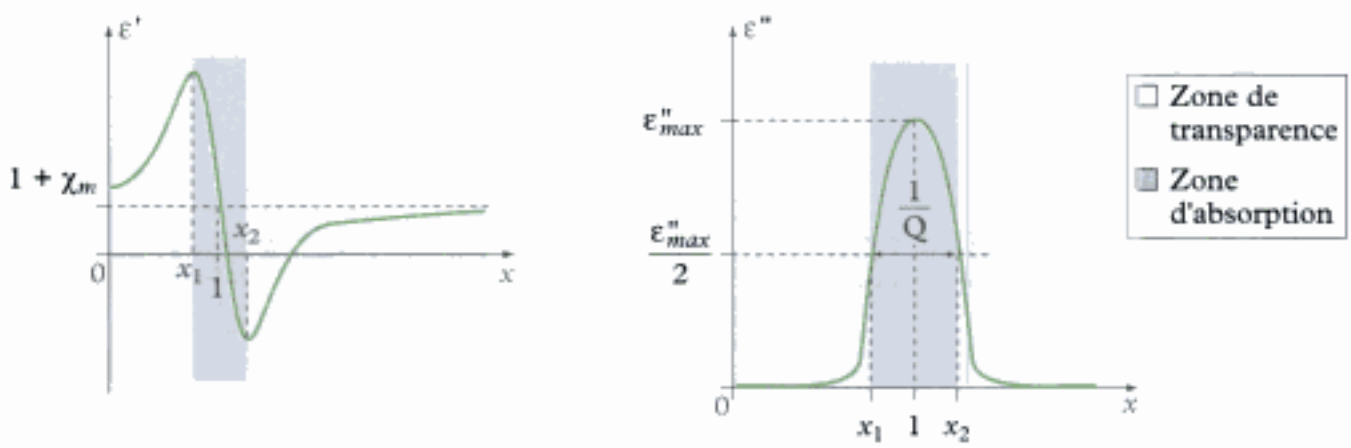
$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega) = 1 + \frac{\chi_m}{1 - x^2 - j\dfrac{x}{Q}}.$$

La partie réelle ε_r' et la partie imaginaire ε_r'' de la permittivité relative sont alors :

$$\varepsilon_r'(\omega) = 1 + \frac{1 - x^2}{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2} \chi_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_r''(\omega) = \frac{\dfrac{x}{Q}}{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2} \chi_m.$$

La figure 4 donne les courbes représentatives de ces deux grandeurs. Leurs variations sont identiques à celles de χ' et χ''[18] ; elles font en particulier apparaître un domaine $[x_1, x_2]$ où la partie réelle varie beaucoup et la partie imaginaire présente un pic.

18. On a en effet :
$\varepsilon_r' = 1 + \chi'$ et $\varepsilon_r'' = 1 + \chi''$.



Évolution de la partie réelle — Évolution de la partie imaginaire

Fig. 4 - Étude de la permittivité diélectrique ($Q \gg 1$).

Copyrighted material

• La permittivité relative permet de calculer l'indice complexe du milieu grâce à la relation :

$$\underline{n}^2(\omega) = \underline{\varepsilon}_r(\omega).$$

On peut ainsi donner une expression approchée de $\underline{n}$ pour certaines valeurs de x dans les zones d'absorption et de transparence.

– Si $x = 1$ (zone d'absorption), on a :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) \approx 1 + jQ\chi_m, \quad \text{avec } \chi_m \ll 1,$$

soit en développant $\underline{n} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r} = \sqrt{1+(\underline{\varepsilon}_r - 1)}$ à l'ordre 1 en χ_m :

$$\underline{n} \approx 1 + \frac{\underline{\varepsilon}_r - 1}{2}, \text{ d'où : } n' \approx 1 \text{ et } n'' \approx \frac{Q\chi_m}{2}.$$

– Si $x \ll 1$ (zone de transparence), on a en développant à l'ordre 1 en x :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) \approx 1 + \chi_m + j\frac{x}{Q}\chi_m \quad \text{avec} \quad \chi_m \ll 1,$$

d'où comme précédemment :

$$n' \approx 1 + \chi_m \quad \text{et} \quad n'' \approx \frac{x}{2Q}\chi_m.$$

• Pour une OPPH se propageant selon la direction Oz dans le sens des z croissants, le champ électrique a pour expression :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_m e^{-n''(\omega)\frac{\omega}{c}z} \cos\left(\omega t - n'(\omega)\frac{\omega}{c}z\right).$$

– L'indice d'extinction n'' contribue à l'amortissement de l'amplitude de l'onde. Plus sa valeur est élevée, plus l'absorption de l'onde électromagnétique par le milieu est forte, ce qui justifie la dénomination de **zone d'absorption** pour l'intervalle $[x_1, x_2]$[19].

– À l'extérieur de cet intervalle, l'indice d'extinction n'' est très faible et l'indice optique n' prend des valeurs proches de l'unité[20]. L'onde électromagnétique peut se propager pratiquement sans atténuation dans le milieu, ce qui justifie la dénomination de **zone de transparence** pour ce domaine de fréquences.

19. Pour $x = 1$, on a n'' de l'ordre de 10^{-3} (cf. § A.7). L'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu, donné par $\delta = \frac{c}{n''\omega}$, est de $3 \cdot 10^{-3}$ m. L'onde ne se propage pratiquement pas dans le milieu.

20. Dans le visible, pour $x \ll 1$, on a $n' = 1$ et $n'' = 10^{-9}$ (cf. § A.7). L'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration de l'onde est de 10^9 m.

C. Aspects énergétiques

Dans un milieu matériel quelconque, les expressions du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et de la densité volumique d'énergie e diffèrent de leurs expressions dans le vide. Toutefois, dans un DLHI, le vecteur de Poynting s'écrit encore sous la forme :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}.$$

D'après le § B.2, pour une onde de pulsation ω se propageant dans le DLHI selon la direction Oz dans le sens des z croissants, le champ électrique et le champ magnétique s'écrivent en représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_m e^{k''(\omega)z} e^{j(\omega t - k'(\omega)z)} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}} = \underline{k}(\omega)\frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}.$$

Copyrighted material

En posant $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ et en prenant la partie réelle de ces champs, il vient[21] :

$$\begin{cases} \vec{E} = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{E}}\right] = \vec{E}_m e^{k''(\omega)z} \cos(\omega t - k'(\omega)z) \\ \vec{B} = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{B}}\right] = \vec{B}_m \dfrac{e^{k''(\omega)z}}{\omega} \left[k'(\omega)\cos(\omega t - k'(\omega)z) - k''(\omega)\sin(\omega t - k'(\omega)z)\right] \end{cases}$$

On en déduit l'expression du vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{E_m^2}{\mu_0 \omega} e^{2k''(\omega)z} \left[k'(\omega)\cos^2(\omega t - k'(\omega)z) - k''(\omega)\sin(\omega t - k'(\omega)z)\cos(\omega t - k'(\omega)z)\right] \vec{u}_z .$$

Sa valeur moyenne temporelle s'écrit alors plus simplement :

$$\boxed{\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{k'(\omega) E_m^2}{2\mu_0 \omega} e^{2k''(\omega)z} \vec{u}_z}.$$

En introduisant l'indice optique $n'(\omega) = \dfrac{c}{\omega} k'(\omega)$, il vient finalement :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = n'(\omega) \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2} e^{2k''(\omega)z} \vec{u}_z .$$

Ce résultat diffère de celui obtenu dans le vide par la présence du terme d'absorption $e^{2k''(\omega)z}$ et de l'indice optique $n'(\omega)$. Dans le vide, on a en effet : $n' = 1$ et $k'' = 0$ pour toutes les pulsations.

21. On pose :

$$\vec{B}_m = \vec{u}_z \wedge \vec{E}_m .$$

Remarque

La définition de la densité volumique d'énergie e est beaucoup plus délicate et ne figure pas explicitement au programme de la filière PC. On peut cependant retenir que sa connaissance permettrait de déterminer la vitesse de propagation de l'énergie v_E[22], dont on constaterait qu'elle est différente de la vitesse de groupe v_g de l'onde en raison du phénomène d'absorption.

22. La vitesse de propagation de l'énergie se définit par :

$$v_e = \frac{\left\| \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \right\|}{\langle e \rangle} .$$

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Milieu diélectrique

- Le **vecteur polarisation** d'un milieu diélectrique, noté $\vec{P}$, est une grandeur vectorielle locale nivelée qui varie continûment dans l'espace et dans le temps :

$$\vec{\mathbf{P}} = n\langle \vec{p} \rangle_s$$

n densité volumique de dipôles (m^{-3})

$\langle \vec{p} \rangle_s$ moment dipolaire moyen ($C \cdot m$)

$\vec{P}$ vecteur polarisation ($C \cdot m^{-2}$)

- Dans un milieu diélectrique de vecteur polarisation $\vec{P}$, il existe des **courants de polarisation** microscopiques caractérisés au niveau mésoscopique par les densités volumiques de courants liés et de charges liées :

$$\vec{j}_{liés} = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \rho_{liées} = -\mathbf{div}\vec{\mathbf{P}}.$$

- Dans un milieu diélectrique dénué de propriétés magnétiques et dans lequel n'existe aucune charge libre, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \\ \text{(ii)} \ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} \ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \text{(iv)} \ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0 \dfrac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \end{cases}$$

✓ Propagation d'une OPPH dans un DLHI

- Pour un **diélectrique linéaire, homogène et isotrope (DLHI)** en régime harmonique de pulsation ω, la relation constitutive du milieu s'écrit, en représentation complexe :

$$\vec{\mathbf{P}}(M,t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega)\vec{E}(M,t),$$

où la susceptibilité $\underline{\chi}$ est seulement fonction de la pulsation ω.

- Une OPPH en propagation dans un DLHI est **transversale**. La relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \underline{\chi}).$$

Il y a donc simultanément **dispersion** et **absorption**.

- Pour caractériser un milieu par rapport au vide, on définit sa **permittivité relative complexe** $\underline{\varepsilon}_r$ par la relation :

$\underline{k}^2(\omega) = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r(\omega)\omega^2$, soit pour un DLHI : $\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega)$.

L'indice complexe du milieu vaut alors :

$$\underline{n}^2(\omega) = \underline{\varepsilon}_r(\omega).$$

– La partie réelle n′ de l'indice complexe est appelée **indice optique** et caractérise la propagation de l'onde. Elle est liée à la vitesse de phase par la relation :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{n'(\omega)}.$$

– La partie imaginaire de l'indice complexe, proportionnelle à k'', caractérise l'absorption de l'onde par le milieu. On l'appelle **indice d'extinction** (ou indice d'absorption) à la pulsation ω.

Copyrighted material

Hidden page

D'où l'équation d'évolution de l'électron en représentation complexe :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\underline{\vec{r}}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\underline{\vec{r}} - e\underline{\vec{E}}_m e^{j\omega t}.$$

En recherchant $\underline{\vec{r}}$ sous la forme $\underline{\vec{r}}_m e^{j\omega t}$, il vient :

$$m(\omega_0^2 - \omega^2)\ \underline{\vec{r}}_m = -e\ \underline{\vec{E}}_m.$$

D'où :

$$\underline{\vec{r}}_m = \frac{-\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\vec{E}}_m, \text{ puis : } \underline{\vec{r}} = -\frac{\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\vec{E}}$$

❷ Lors du mouvement d'un électron, chaque atome acquiert un moment dipolaire :

$$\underline{\vec{p}} = -e\underline{\vec{r}}.$$

D'où le vecteur polarisation du milieu :

$$\underline{\vec{P}} = n\underline{\vec{p}}, \text{ soit : } \boxed{\underline{\vec{P}} = \frac{\frac{ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\vec{E}}}$$

Introduisons la pulsation plasma $\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ pour écrire :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\vec{E}}.$$

Sachant que la susceptiblité $\underline{\chi}_e(\omega)$ est définie par : $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0\underline{\chi}_e\underline{\vec{E}}$, il vient :

$$\boxed{\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

puis la permittivité relative complexe donnée par :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e, \text{ d'où : } \boxed{\underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

❸ La densité de courant $\underline{\vec{j}}_{\text{liés}}$ est donnée par :

$$\underline{\vec{j}}_{\text{liés}} = -ne\underline{\vec{v}},$$

où $\underline{\vec{v}}$ désigne la vitesse de chaque électron :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}\underline{\vec{r}}}{\mathrm{d}t}, \text{ soit : } \underline{\vec{v}} = j\omega\underline{\vec{r}}.$$

En notant que le vecteur polarisation $\underline{\vec{P}}$ s'écrit : $\underline{\vec{P}} = -ne\underline{\vec{r}}$, on constate que :

$$\underline{\vec{j}}_{\text{liés}} = \frac{\partial\underline{\vec{P}}}{\partial t}.$$

Par ailleurs, la conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial\rho_{\text{liées}}}{\partial t} + \text{div}\underline{\vec{j}}_{\text{liés}} = 0, \text{ soit : } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{liées}} + \text{div}\underline{\vec{P}}) = 0 \quad \text{et} \quad \rho_{\text{liées}} = -\text{div}\underline{\vec{P}}.$$

Copyrighted material

En représentation complexe, les équations de Maxwell s'écrivent dans le milieu :

$$\begin{cases} \text{(i)} \Rightarrow \operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\rho_{\text{libres}}}{\varepsilon_0} \\ \text{(ii)} \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \text{(iii)} \Rightarrow \operatorname{div}\underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{(iv)} \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0\left(\underline{\vec{j}}_{\text{libres}} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) \end{cases} \Rightarrow \text{pour une OPPH : } \begin{cases} \text{(i)} \Rightarrow -j\underline{\varepsilon}_r \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{(ii)} \Rightarrow -j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \\ \text{(iii)} \Rightarrow -j\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{(iv)} \Rightarrow -j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r j\omega \underline{\vec{E}} \end{cases}$$

En combinant les équations (ii) et (iv), on a :

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}})$$

soit :

$$(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}})\underline{\vec{k}} - \underline{k}^2 \cdot \underline{\vec{E}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \omega^2 \underline{\vec{E}}$$

ou encore :

$$(\underline{k}^2 c - \underline{\varepsilon}_r \omega^2)\underline{\vec{E}} = 0 .$$

D'où la relation de dispersion :

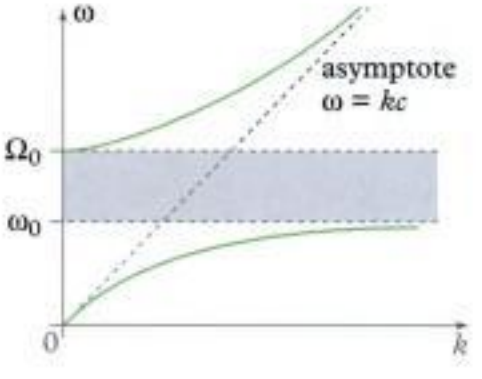
$$\boxed{\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}}$$

2) • Avec l'expression de $\underline{\varepsilon}_r$ trouvée plus haut, on a :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \times \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

en posant $\Omega_0^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$.

• Avec $\Omega_0 > \omega_0$, on remarque que :
– si $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0$ ou $\omega \geqslant \Omega_0$, alors $\underline{k}^2 \geqslant 0$. $\underline{k}$ est alors réel. Une onde peut se propager dans le milieu sans absorption.
– si $\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \Omega_0$, alors $\underline{k}^2 \leqslant 0$. $\underline{k}$ est alors imaginaire pur. L'onde ne peut plus se propager. Elle est absorbée par le milieu.
La propagation n'est donc possible que pour des pulsations ω en dehors de la bande d'absoption $\omega_0 < \omega < \Omega_0$.



Nous laissons le lecteur faire les calculs permettant de tracer la courbe.

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex.1 Polarisation électronique

Le champ électrique $\vec{E}$ qui intervient dans l'écriture des équations de Maxwell est un champ macroscopique dans le sens où il est défini comme une grandeur nivelée sur une échelle grande devant les distances inter-atomiques. Le champ électrique auquel est soumis chaque atome ou molécule d'un milieu diélectrique est un champ microscopique appelé champ local $\vec{E}_{loc}$. Quand le milieu est faiblement polarisé, ce champ s'exprime en fonction de $\vec{E}$ et du vecteur polarisation $\vec{P}$ suivant la relation :

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

On considère un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope contenant des électrons mobiles de masse m, de charge $-e$ liés à des ions fixes de charge opposée. On note n la densité volumique d'électrons ou de cations. Le milieu est soumis à une OPPH de pulsation ω.

1) On définit la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}(\omega)$ du milieu en régime harmonique permanent par :

$$\vec{\underline{P}} = n\varepsilon_0 \underline{\alpha}(\omega)\vec{\underline{E}}_{loc}.$$

Après avoir rappelé la relation entre le vecteur polarisation et le champ électrique $\vec{E}$ de Maxwell, exprimer la susceptibilité diélectrique $\underline{\chi}_e(\omega)$ complexe en fonction de $\underline{\alpha}(\omega)$.

2) On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié pour décrire le mouvement des charges, en notant ω_0 la pulsation propre caractéristique associée à la force de rappel et $-2m\Gamma\vec{v}$ la force de frottements fluides.

On désigne par $\vec{r}$ le déplacement d'un électron par rapport à sa position d'équilibre. Avec, en représentation complexe :

$$\vec{\underline{E}}_{loc} = \vec{E}_{m,loc}e^{j\omega t}$$

exprimer $\vec{\underline{r}}$ en fonction du champ électrique local.

3) En déduire l'expression du vecteur polarisation et de la polarisabilité.

4) On rappelle la relation entre la permittivité relative complexe et la susceptibilité complexe :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}_e(\omega).$$

a. Déterminer la permittivité relative complexe du milieu sous la forme :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega).$$

b. Tracer l'allure des graphes de $\varepsilon'(\omega)$ et de $\varepsilon''(\omega)$ dans le cas où les frottements sont négligeables. Montrer en particulier l'existence d'une zone d'absorption et de zones de transparence.

5) On se place en dehors de la bande d'absorption dans un domaine de « basse » fréquence. Après avoir rappelé la relation entre l'indice complexe et la permittivité relative, montrer que l'indice optique du milieu est donné par la formule approchée de Cauchy :

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2}.$$

Identifier a et b.

Ex.2 Couche anti-reflet

Une mince couche plane de diélectrique, d'épaisseur e et d'indice n_1, est déposée sur un milieu transparent d'indice n_2. Une onde électromagnétique harmonique plane polarisée rectilignement se propage dans l'air (indice pris égal à 1) suivant la direction Oz et tombe sous incidence normale sur le diélectrique. Son champ électrique en représentation complexe est :

$$\vec{\underline{E}}_i = \vec{\underline{E}}_{0i}e^{j(\omega t - kz)} \quad (\text{pour } z \leqslant 0)$$

L'onde est alors en partie réfléchie dans l'air, en partie transmise et réfléchie dans le diélectrique, et en partie transmise dans le milieu transparent.

1) Exprimer le champ électrique et le champ magnétique total dans l'air ($z \leqslant 0$), dans le diélectrique ($0 \leqslant z \leqslant e$) et dans le milieu transparent ($z \geqslant e$).

2) Les surfaces de séparation des milieux étant dépourvues de courant surfacique, comment s'expriment les relations de passage aux interfaces ?

3) En déduire que le champ électrique réfléchi dans l'air s'écrit :

$$\vec{\underline{E}}_r = \frac{(1-n_1)(n_1+n_2)e^{j\varphi} + (1+n_1)(n_1-n_2)}{(1+n_1)(n_1+n_2)e^{j\varphi} + (1-n_1)(n_1-n_2)}\vec{\underline{E}}_{0i}$$

avec $\varphi = \dfrac{2n_1e\omega}{c}$.

4) Comment doit-on choisir e et n_1 pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie ?

Ex.3 Onde évanescente

Deux diélectriques parfaits d'indices n_1 et n_2 occupent respectivement les demi-espaces $x < 0$ et $x > 0$. Une OPPH de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant Oz, se propage dans le milieu 1 vers la surface de séparation des deux milieux. Elle arrive sur le dioptre avec un angle d'incidence θ_1.

Copyrighted material

1) Déterminer l'angle θ_l à partir duquel se produit le phénomène optique de réflexion totale.

2) On note le champ électrique incident sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_m e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}.$$

a. Expliciter le vecteur d'onde incident $\vec{k}_i$. Exprimer le champ électrique transmis si $\theta_i < \theta_l$ et le mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_t = \vec{E}_{t,m} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}.$$

b. Montrer que l'expression précédente pour le champ transmis peut être exploitée si $\theta_i > \theta_l$ en introduisant un vecteur d'onde transmis complexe. On posera :

$$n'' = \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}.$$

3) Définir la profondeur de pénétration δ de l'onde dans le milieu 2. Tracer le graphe de δ en fonction de θ_i.

4) Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}_t$ de l'onde transmise.

5) En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, puis sa valeur moyenne temporelle. Conclure.

Ex.4 Puissance dissipée dans un diélectrique

Une OPPH de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant la direction Ox, se propage dans la direction Oz dans un diélectrique de permittivité relative complexe :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon'(\omega) + j\varepsilon''(\omega).$$

1) Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde en représentation complexe. Rappeler la relation entre le vecteur d'onde complexe et la permittivité relative complexe.

2) En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, associé à l'onde. Montrer que sa valeur moyenne peut s'écrire :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\mu_0} \right].$$

3) Définir la puissance moyenne P_m dissipée par l'onde au cours de sa propagation en fonction de la densité volumique d'énergie électromagnétique e.

4) Montrer que P_m s'écrit :

$$P_m = -\mathrm{div}\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle.$$

Expliciter P_m dans la situation de l'exercice.

Niveau 2

Ex.5 Propagation dans un diélectrique absorbant

Une ampoule cylindrique, d'axe de révolution Oz, contient un gaz à molécules non polaires. Une OPPH de pulsation ω polarisée rectilignement se propage dans la direction Oz. Son champ électrique s'écrit, en représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_m e^{j(\omega t - \underline{k} z)}.$$

On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié pour décrire le mouvement des électrons des molécules. Ainsi, l'équation d'évolution du déplacement d'un électron par rapport à sa position d'équilibre est :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - 2m\Gamma\frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E}.$$

1) On néglige la dépendance spatiale du champ électrique au niveau de la molécule. Justifier cette approximation.

2) Déterminer alors, en régime permanent, les représentations complexes du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}$.

3) Chaque molécule porte Z électrons. La densité volumique de molécules est N.

a. Déterminer le vecteur polarisation du milieu en représentation complexe.

b. En déduire la permittivité diélectrique relative complexe $\underline{\varepsilon}(\omega)$.

c. On décompose $\underline{\varepsilon}(\omega)$ sous la forme :

$$\underline{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega).$$

Donner les expressions de $\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$.

d. Interpréter physiquement la partie imaginaire de $\underline{\varepsilon}(\omega)$.

4) Le milieu est supposé non magnétique.

a. Écrire les équations de Maxwell et en déduire la relation de dispersion liant k et ω.

b. Définir l'indice complexe $\underline{n}(\omega)$ et exprimer $\underline{n}^2$.

5) La physique quantique conduit à modifier l'expression de $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$. Pour passer d'un état d'énergie E_i à un état d'énergie E_j, la molécule émet ou absorbe un photon de pulsation ω_{ij} telle que :

$$|E_j - E_i| = \hbar\omega_{ij},$$

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ étant la constante de Planck réduite.

Pour simplifier, on admet que les molécules du gaz existent essentiellement dans deux états d'énergie E_1 et E_2 avec $E_2 > E_1$. Les densités volumiques moléculaires dans ces états sont notées N_1 et N_2. On montre alors que $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{Ce^2}{2\varepsilon_0 m\omega_0}(N_1 - N_2)\frac{1}{\omega_0 - \omega + j\Gamma},$$

C étant un coefficient sans dimension et la pulsation de résonance ω_0 étant donnée par $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$.

a. Comment s'exprime le rapport $\dfrac{N_2}{N_1}$ des densités à l'équilibre thermodynamique ?

Copyrighted material

Hidden page

On désigne par $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$ la pulsation cyclotron et on pose $u = \dfrac{\omega\,\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$, coefficient sans dimension proportionnel à B_0.

a. Exprimer les composantes $\underline{P}_x$, $\underline{P}_y$, $\underline{P}_z$, du vecteur polarisation en fonction de celles du champ électrique $\underline{\vec{E}}$. En déduire une relation entre $\underline{\vec{P}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sous la forme :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 [\underline{\chi}] \underline{\vec{E}},$$

où $[\underline{\chi}]$ désigne une matrice dont on exprimera les coefficients en fonction de χ_0 et de u. On posera :

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_0(\omega)}{1-u^2} \quad \text{et} \quad g(\omega) = \chi(\omega)u.$$

b. On pose $[\underline{\varepsilon}_r] = [\mathrm{Id}] + [\underline{\chi}]$, où $[\mathrm{Id}]$ désigne la matrice identité. Montrer que $[\underline{\varepsilon}_r]$ est de la forme :

$$[\underline{\varepsilon}_r] = \begin{bmatrix} 1+\chi & -jg & 0 \\ jg & 1+\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1+\chi_0 \end{bmatrix}$$

5) Le milieu diélectrique est supposé isolant, non chargé et de propriétés magnétiques négligeables.

a. Montrer que le champ électrique est transverse.

b. Établir que l'équation de propagation vérifiée par $\underline{\vec{E}}$ s'écrit :

$$[\underline{\varepsilon}_r] \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \underline{\vec{E}} = \vec{0}.$$

c. En déduire la relation de dispersion.

6) L'indice n du milieu est défini par :

$$k = n\frac{\omega}{c}$$

On suppose que : $g < 1 + \chi$ et que le milieu est transparent pour l'onde.

a. Exprimer n^2 en fonction de χ et g, et en déduire deux solutions possibles pour n.

b. Montrer que, selon la solution retenue pour n, $\underline{E}_x = \pm j\underline{E}_y$. Préciser l'état de polarisation correspondant à chacune de ces solutions.

7) Le diélectrique occupe l'espace compris entre les plans $z = 0$ et $z = L$. Une onde incidente polarisée rectilignement se propage selon les z croissants à l'entrée $z = 0$ du milieu. Les composantes de son champ électrique, en $z = 0$, sont :

$$\underline{E}_x = E_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{E}_y = 0,$$

E_m étant un réel positif.

a. En décomposant l'onde polarisée rectilignement en une somme de deux ondes polarisées circulairement, déterminer les composantes du champ électrique pour $0 < z < L$.

b. Montrer que l'onde reste polarisée rectilignement en tout point du diélectrique, mais que la direction de la polarisation tourne progressivement au cours de la propagation.
Exprimer l'angle de rotation θ de cette direction à la sortie du milieu en fonction des indices n_+ et n_- associés respectivement aux polarisations circulaires droite et gauche.

c. On adopte les valeurs numériques suivantes :
$\omega = 3{,}2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$; $\omega_0 = 10^{16}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$; $B_0 = 1\ \mathrm{T}$; $N = 6 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$.

En déduire une expression littérale approchée de la différence $n_+ - n_-$ en fonction de g et de l'indice moyen du milieu noté n_m.

d. Montrer que l'angle de rotation peut s'écrire :

$$\theta = VLB_0$$

où V est une constante caractéristique du milieu appelée constante de Verdet. Donner l'expression de cette constante.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) On a les trois relations, en représentation complexe :

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi_e}\, \underline{\vec{E}}, \quad \underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 n \underline{\alpha}\, \underline{\vec{E}}_{loc} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_{loc} = \underline{\vec{E}} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{\vec{P}}.$$

Ainsi : $\dfrac{1}{\varepsilon_0 n \underline{\alpha}} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \underline{\chi}_e} + \dfrac{1}{3\varepsilon_0}$, soit :

$$\boxed{\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{n\underline{\alpha}(\omega)}{1 - \dfrac{n\underline{\alpha}(\omega)}{3}}}$$

2) Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, le déplacement d'un électron par rapport à sa position d'équilibre, noté $\vec{r}$, vérifie l'équation :

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\,\vec{r} - 2m\Gamma\frac{d\vec{r}}{dt} - e\,\vec{E}_{loc}$$

l'effet du champ magnétique de l'onde étant négligé. En représentation complexe, l'équation étant linéaire, on obtient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega)\,\underline{\vec{r}} = -\frac{e}{m}\,\underline{\vec{E}}_{loc}$$

qui donne :

$$\boxed{\underline{\vec{r}} = \frac{-\dfrac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega}\,\underline{\vec{E}}_{loc}}$$

3) Chaque atome acquiert, lors du déplacement d'un électron, un moment dipolaire :

$$\vec{p} = -e\,\vec{r}.$$

D'où le vecteur de polarisation du milieu :

$$\vec{P} = n\,\vec{p}$$

soit, en représentation complexe :

$$\boxed{\underline{\vec{P}} = \frac{\dfrac{ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega}\,\underline{\vec{E}}_{loc}}.$$

On en déduit la polarisabilité $\underline{\alpha}$ du milieu :

$$\boxed{\underline{\alpha}(\omega) = \frac{\dfrac{e^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega}}$$

4) a. On a alors la susceptibilité diélectrique :

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{n\underline{\alpha}(\omega)}{1 - \dfrac{n\underline{\alpha}(\omega)}{3}},$$

Copyright material

puis la permittivité relative complexe :

$$\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}_e(\omega).$$

On obtient :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{1}{\frac{1}{n\underline{\alpha}} - \frac{1}{3}}$$

soit :

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 m}{ne^2}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega\right) - \frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega - \frac{\omega_p^2}{3}}$$

en introduisant $\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$.

D'après l'énoncé, on sait que : $\omega_p \ll \omega_0$. La différence $\omega_0^2 - \dfrac{\omega_p^2}{3}$ est donc positive.

On pose : $\Omega_0^2 = \omega_c^2 - \dfrac{\omega_p^2}{3}$. Ainsi :

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_0^2 - \omega^2 + 2j\Gamma\omega}}$$

b. On obtient alors $\varepsilon' = \mathrm{Re}[\underline{\varepsilon}_r]$ et $\varepsilon'' = -\mathrm{Im}[\underline{\varepsilon}_r]$:

$$\begin{cases} \varepsilon'(\omega) = 1 + \dfrac{\omega_p^2}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2}(\Omega_0^2 - \omega^2) \\ \varepsilon''(\omega) = \dfrac{\omega_p^2}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2}(2\Gamma\omega) \end{cases}$$

Posons $\chi_0 = \underline{\chi}(\omega = 0)$, soit : $\chi_0 = \dfrac{\omega_p^2}{\Omega_0^2}$.

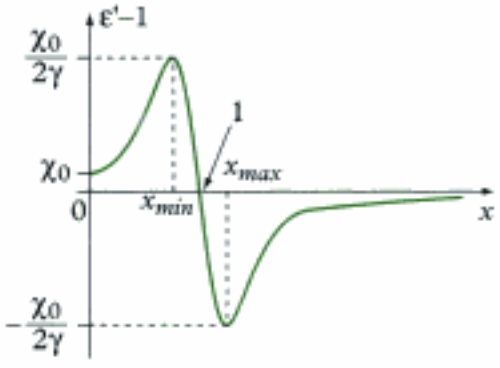
Posons également : $x = \dfrac{\omega}{\Omega_0}$ et $\gamma = \left|\dfrac{2\Gamma}{\Omega_0}\right|$.

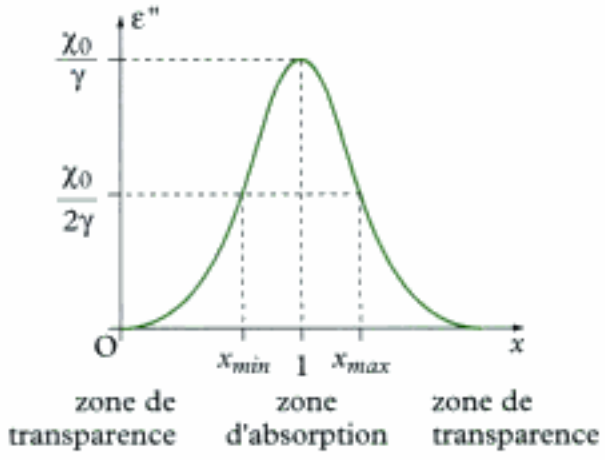
Alors les expressions précédentes s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{\chi_0}{(1-x^2)^2 + \gamma^2 x^2}(1-x^2) \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{\chi_0}{(1-x^2)^2 + \gamma^2 x^2}\gamma x \end{aligned}}$$

Les graphes de $\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$ ont les allures suivantes, dans le cas où $\gamma \ll 1$.

Copyrighted material





5) L'indice complexe est défini par :

$$\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r.$$

En dehors de la zone d'absorption, on a pratiquement $\varepsilon'' \approx 0$. $\underline{\varepsilon}_r$ est alors réel et $\underline{n}$ est sensiblement égal à l'indice optique n réel. Alors :

$$n_2 \approx \varepsilon'.$$

Si on se place dans la zone de transparence pour laquelle $x \ll 1$, on a :

$$\varepsilon' \approx 1 + \frac{\chi_0}{1-x^2}, \text{ puis : } \quad \varepsilon' \approx 1 + \chi_0(1 + x^2).$$

Alors :

$$\sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1+\chi_0}\sqrt{1+\frac{\chi_0}{1+\chi_0}x^2}, \qquad \text{soit : } \quad \sqrt{\varepsilon'} \approx \sqrt{1+\chi_0}\left(1+\frac{\chi_0}{2(1+\chi_0)}x^2\right).$$

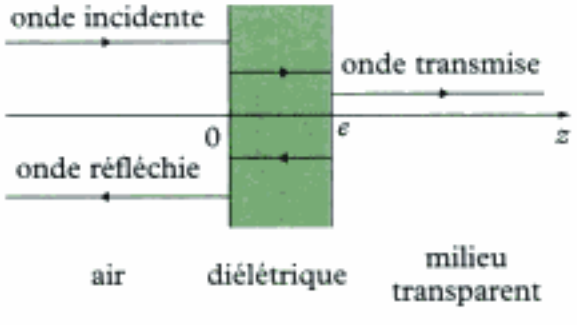
Ainsi : $n = \sqrt{1+\chi_0} + \dfrac{\chi_0}{2\sqrt{1+\chi_0}}x^2$.

Avec : $x = \dfrac{\omega}{\Omega_0}$ et en notant : $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$, $\Omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\Lambda_0}$, on obtient la formule de Cauchy :

$$\boxed{n \approx a + \frac{b}{\lambda^2}}, \qquad \text{avec} \quad a = \sqrt{1+\chi_0}, \quad b = \frac{\chi_0}{2\sqrt{1+\chi_0}}\Lambda_0^2.$$

Exercice 2

1) La situation physique est la suivante :



Copyright material

L'onde incidente est en partie transmise dans le diélectrique. L'onde transmise y subit alors des réflexions internes multiples, des transmissions multiples vers l'air et vers le milieu transparent.

L'onde réfléchie dans l'air est donc la superposition de multiples ondes réfléchies dans le diélectrique et transmises vers l'air, à laquelle s'ajoute la première réflexion de l'onde incidente. On peut donc écrire, sans pour l'instant les expliciter, les champs électriques et magnétiques totaux dans les différents milieux.

Dans l'air, on a, en représentation complexe :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_a = \underbrace{\underline{\vec{E}}_i e^{j(\omega t - kz)}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{\underline{\vec{E}}_r e^{j(\omega t + kz)}}_{\text{onde réfléchie}} \\ \underline{\vec{B}}_a = \underbrace{\underline{\vec{B}}_i e^{j(\omega t - kz)}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{\underline{\vec{B}}_r e^{j(\omega t + kz)}}_{\text{onde réfléchie}} \end{cases}$$

Dans le diélectrique, on a :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_1 = \underbrace{\underline{\vec{E}}_{1i} e^{j(\omega t - n_1 kz)}}_{\substack{\text{onde transmise} \\ \text{à l'interface} \\ \text{air/diélectrique}}} + \underbrace{\underline{\vec{E}}_{1r} e^{j(\omega t + n_1 kz)}}_{\substack{\text{onde réfléchie} \\ \text{sur l'interface} \\ \text{diélectrique/milieu transparent}}} \\ \underline{\vec{B}}_1 = \underbrace{\underline{\vec{B}}_{1i} e^{j(\omega t - n_1 kz)}}_{\substack{\text{onde transmise} \\ \text{à l'interface} \\ \text{air/diélectrique}}} + \underbrace{\underline{\vec{B}}_{1r} e^{j(\omega t + n_1 kz)}}_{\substack{\text{onde réfléchie} \\ \text{sur l'interface} \\ \text{diélectrique/milieu transparent}}} \end{cases}$$

Dans le milieu transparent, on a :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_2 = \underbrace{\underline{\vec{E}}_{2i} e^{j(\omega t - n_2 kz)}}_{\substack{\text{onde transmise à l'interface} \\ \text{diélectrique/milieu transparent}}} \\ \underline{\vec{B}}_2 = \underbrace{\underline{\vec{B}}_{2i} e^{j(\omega t - n_2 kz)}}_{\substack{\text{onde transmise à l'interface} \\ \text{diélectrique/milieu transparent}}} \end{cases}$$

⚠ Dans le diélectrique et dans le milieu transparent, il faut tenir compte de l'indice pour écrire le vecteur d'onde. Dans l'air, on a : $k = \frac{\omega}{c}$.

2) Pour une OPPH tombant sous incidence normale sur un dioptre, il y a continuité du champ électrique. Ainsi :

– en $z = 0$: $\underline{\vec{E}}_a(z = 0, t) = \underline{\vec{E}}_1(z = 0, t)$;

– en $z = e$: $\underline{\vec{E}}_1(z = e, t) = \underline{\vec{E}}_2(z = e, t)$.

En l'absence de courants surfaciques sur les surfaces de séparation des milieux, il y a également continuité du champ magnétique :

– en $z = 0$: $\underline{\vec{B}}_a(z = 0, t) = \underline{\vec{B}}_1(z = 0, t)$;

– en $z = e$: $\underline{\vec{B}}_1(z = e, t) = \underline{\vec{B}}_2(z = e, t)$.

Pour une OPPH se propageant dans un milieu non absorbant d'indice n, on a :

$$\vec{B} = \frac{n}{c} \vec{u} \wedge \vec{E},$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la direction de propagation, de sorte que les relations de passage aux interfaces s'écrivent :

Copyrighted material

Hidden page

4) Pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie ($\underline{\vec{E}}_r = \vec{0}$), on doit imposer que le numérateur de la relation précédente soit nul :

$$(1 - n_1)(n_1 + n_2)e^{j\varphi_1} + (1 + n_1)(n_1 - n_2) = 0$$

soit encore :

$$\frac{(n_1 + 1)(n_1 - n_2)}{(n_1 - 1)(n_1 + n_2)} = e^{j\varphi_1} .$$

Le membre de gauche de cette dernière égalité est réel. Par conséquent, le membre de droite doit l'être. Ce qui impose :

$$\varphi_1 = \pi p, \quad p \text{ étant un entier.}$$

Dans ce cas :

$$(n_1 + 1)(n_1 - n_2) = (-1)^p(n_1 - 1)(n_1 + n_2)$$

qui donne :

$$[1 - (-1)^p](n_1^2 - n_2) = [1 + (-1)^p](n_2 - 1)n_1.$$

On peut effectivement vérifier l'identité entre les deux expressions.

Ainsi, on doit distinguer deux cas :
– p pair, qui entraîne $n_2 = 1$;
– p impair, qui entraîne $n_1 = \sqrt{n_2}$.

En pratique, seul le deuxième cas présente un intérêt lorsqu'on veut éliminer la réflexion sur un matériau d'indice n_2 fixé. On y dépose alors une couche de diélectrique d'indice :

$$\boxed{n_1 = \sqrt{n_2}}$$

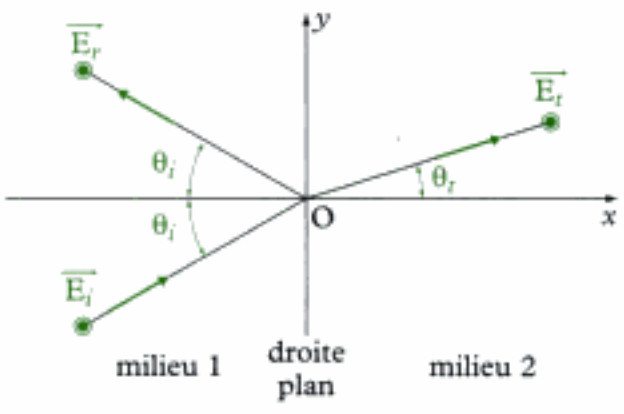
et d'épaisseur :

$$\boxed{e = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi e}{\omega\sqrt{n_2}}},$$

p étant un nombre entier positif ou nul.

Exercice 3

1) La situation physique est la suivante :



Copyrighted material

Puisque $n_2 < n_1$, il peut y avoir réflexion totale, au sens de l'optique géométrique, sur le dioptre. En appliquant les lois de Descartes, l'angle θ_i à partir duquel le phénomène est observé est donné par la relation :

$$n_1 \sin\theta_i = n_2$$

de sorte que :

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

2) a. Notons $\underline{\vec{E}}_i$ le champ électrique incident en représentation complexe. On peut écrire :

$$\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_m \vec{u}_z e^{j\left[\omega t - \frac{n_1\omega}{c}(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)\right]}.$$

Ce champ, polarisé suivant $\vec{u}_z$, se propage dans la direction définie par le vecteur d'onde incident :

$$\vec{k}_i = \frac{n_1\omega}{c}\left(\cos\theta_i \vec{u}_x + \sin\theta_i \vec{u}_y\right)$$

Ainsi : $\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_m \vec{u}_z e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$, avec $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

Pour l'onde transmise, on peut écrire :

$$\underline{\vec{E}}_t = \vec{E}_{t,m} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

avec, *a priori* : $\vec{k}_t = \frac{n_2\omega}{c}\left(\cos\theta_t \vec{u}_x + \sin\theta_t \vec{u}_y\right)$.

Dans le cas où $\theta_i < \theta_l$, l'angle de réfraction θ_t est donné par :

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t.$$

Ainsi, on peut encore écrire :

$$\vec{k}_t = \frac{\omega}{c}\left[n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_i}\,\vec{u}_x + n_1 \sin\theta_i \vec{u}_y\right].$$

b. Dans le cas où $\theta_i > \theta_l$, l'expression précédente peut être formellement conservée en notant :

$$\vec{k}_t = \frac{\omega}{c}\left[-jn'' \vec{u}_x + n_1 \sin\theta_i \vec{u}_y\right]$$

où $n'' = \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_i - n_2^2}$, nombre réel.

⚠ On pourrait également retenir la solution mathématique opposée. Elle donne une onde dont l'amplitude croît exponentiellement quand x augmente. On la rejette donc en raison de son caractère non physique.

Le champ électrique transmis s'écrit alors :

$$\underline{\vec{E}}_t = \vec{E}_{t,m} e^{-\frac{n''\omega}{c}x} e^{j(\omega t - \frac{n_1\omega}{c}y\sin\theta_i)}$$

On obtient un champ dont l'amplitude décroît exponentiellement suivant la direction Ox. Seule persiste une propagation dans la direction Oy. On obtient donc une onde évanescente.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Ainsi :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^{\star}}{2\mu_0} \right)$$

⚠ Cette relation très pratique montre que la représentation complexe des champs ne permet le calcul de $<\vec{\Pi}>$ que moyennant une opération de conjugaison.

3) La puissance instantanée cédée par l'onde au milieu extérieur, au cours de sa propagation, est :

$$\mathrm{P}(t) = \frac{\partial e}{\partial t}(t)$$

où e est la densité volumique d'énergie électromagnétique. La puissance moyenne P_m est :

$$\mathrm{P}_m = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t \ ,$$

pour une onde périodique de période T. Ainsi :

$$\mathrm{P}_m = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial e}{\partial t}\, \mathrm{d}t$$

4) En utilisant la relation de conservation de l'énergie $\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\Pi} = 0$, on a :

$$\mathrm{P}_m = -\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{div}\vec{\Pi} \mathrm{d}t \ .$$

L'intégration porte sur le temps, la divergence sur l'espace. On peut ainsi écrire :

$$\mathrm{P}_m = -\mathrm{div}\left(\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \vec{\Pi}\, \mathrm{d}t \right), \text{ ce qui donne : } \boxed{\mathrm{P}_m = -\mathrm{div}\langle \vec{\Pi} \rangle} \ .$$

Dans notre cas, on a :

$$\mathrm{P}_m = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k'}{2\mu_0 \omega} \mathrm{E}_m^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \right), \text{ soit : } \boxed{\mathrm{P}_m = \frac{k'}{\mu_0 \omega \delta} \mathrm{E}_m^2 e^{-\frac{2z}{\delta}}}$$

Exercices de niveau 2

Exercice 5

1) Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, un électron reste lié à une molécule en effectuant des oscillations d'amplitude a petites devant la longueur d'onde λ du champ. Ainsi, la phase de l'onde $\vec{k} \cdot \vec{r}$ reste sensiblement la même sur toute la molécule. On peut donc négliger, au niveau microscopique de la molécule, la dépendance spatiale du champ électrique.

⚠ On peut citer les ordres de grandeurs suivants. Dans le visible, la longueur d'onde est de l'ordre de 0,4 µm à 0,8 µm. La taille d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m, celle d'une molécule de quelques nanomètres. À moins d'envisager des rayonnements très énergétiques, on a : $a << \lambda$.

Copyrighted material

Hidden page

En représentation complexe, on a :

$$\text{(i)} \quad \Rightarrow \varepsilon_0(1+\underline{\chi}_e)\vec{\underline{k}}\cdot\vec{\underline{E}}=0$$
$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow -j\vec{\underline{k}}\wedge\vec{\underline{E}}=-j\omega\vec{\underline{B}}$$
$$\text{(iii)} \quad \Rightarrow \vec{\underline{k}}\cdot\vec{\underline{B}}=0$$
$$\text{(iv)} \quad \Rightarrow -j\vec{\underline{k}}\wedge\vec{\underline{B}}=\frac{1}{c^2}j\omega(1+\underline{\chi}_e)\vec{\underline{E}}$$

D'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2=\frac{\omega^2}{c^2}(1+\underline{\chi}_e)$$

Il ne s'agit que de la relation : $\underline{k}^2=\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon}_r$.

Pour obtenir la relation de dispersion, on écrit $\vec{k}\wedge$ (ii), puis on utilise (iv) et le fait que $\vec{\underline{k}}$ et $\vec{\underline{E}}$ sont orthogonaux.

b. L'indice complexe, défini par $\underline{n}^2=\underline{\varepsilon}_r$, s'écrit :

$$\underline{n}^2=1+\chi_0\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+2j\Gamma\omega}$$

5) a. Si la température du milieu est T, les densités N_i suivent une loi de Boltzmann, à l'équilibre :

$$N_i = C\,e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

de sorte que le rapport $\frac{N_2}{N_1}$ s'écrit :

$$\frac{N_2}{N_1}=e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}$$

Ainsi, avec $E_2 > E_1$, on a $N_2 < N_1$. Les niveaux d'énergie les plus peuplés sont ceux de plus faible niveau énergétique.

En outre $N_1 - N_2 > 0$, donc : $\varepsilon'' = -\text{Im}[\underline{\varepsilon}_r] > 0$, comme dans le modèle de l'électron élastiquement lié. L'onde se propage avec atténuation de son amplitude.

b. Si, par un procédé physique, on obtient $N_2 > N_1$, le système n'est plus à l'équilibre thermodynamique.

De plus, ε'' devient négatif. L'amplitude de l'onde croît au cours de sa propagation : elle se charge en énergie, ou autre façon d'exprimer cette idée, elle contient de plus en plus de photons. Cette amplification de l'onde au cours de sa propagation est exploitée dans **l'effet laser**.

Exercice 6

1) En l'absence de champ électrique extérieur, les dipôles constitutifs d'un diélectrique ont des orientations quelconques en raison de l'agitation thermique. La polarisation résultante $\vec{P}$ est donc nulle. Si un champ statique $\vec{E}_0$ est appliqué, la polarisation est proportionnelle à $\vec{E}$.

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_0\vec{E}_0$$

χ_0 étant la susceptibilité diélectrique en régime statique.

Copyrighted material

Hidden page

D'où :

$$j\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}} = \mu_0\omega\,[\sigma + j\omega\varepsilon_0\,(1 + \underline{\chi}_e)]\;\underline{\vec{E}}$$

soit encore :

$$\underline{k}^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2\,(1 + \underline{\chi}_e) - j\mu_0\sigma\omega.$$

Avec : $\underline{\chi}_e = \chi_0\,(1 - j\omega\tau)$, on a :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}[1+\chi_0 - j\omega\tau\chi_0] - j\mu_0\sigma\omega\ , \quad \text{d'où :} \quad \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1+\chi_0 - j\left(\omega\tau\chi_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\right]}$$

5) a. Avec $\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$, on a :

$$\left|\underline{\varepsilon}_r\right| = \sqrt{(1+\chi_0)^2 + (\chi_0\omega\tau)^2}\ .$$

L'énoncé donne $f = 2{,}4 \cdot 10^9$ Hz, d'où :

$$\omega = 2\pi f = 1{,}5\cdot 10^{10}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega\tau = 1{,}5\cdot 10^{-2} \ll 1\ .$$

⚠ Ce résultat était attendu, l'expression $\underline{\chi}_e = \chi_0(1 - j\omega\tau)$ n'étant vérifiée que dans cette situation.

Par conséquent :

$$|\underline{\varepsilon}_r| = 1 + \chi_0, \text{ d'où : } \chi_0 = 80.$$

On peut ainsi calculer :

$$\omega\tau\chi_0 = 1{,}2, \text{ à comparer à } \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \approx 7{,}5\cdot 10^{-7}.$$

On a donc : $\omega\tau\chi_0 \gg \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$, de sorte que :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1+\chi_0 - j\omega\tau\chi_0\right]}$$

b. En écrivant $\underline{k} = k_m e^{-j\phi}$, on a :

$$k_m = |\underline{k}| \quad \text{et} \quad \phi = -\arg\underline{k},$$

soit :

$$\boxed{k_m = \frac{\omega}{c}\left[(1+\chi_0)^2 + (\omega\tau\chi_0)^2\right]^{1/4}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\phi = \frac{1}{2}\arctan\left[\frac{\omega\tau\chi_0}{1+\chi_0}\right]}$$

Avec $\chi_0 \gg 1$, on a :

$$\boldsymbol{k_m \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{1+\chi_0}}\ .$$

c. La partie imaginaire $k'' = \text{Im}[\underline{k}]$ est associée à une absorption de l'onde par le milieu.

La profondeur de pénétration δ est $\dfrac{1}{|k''|}$, soit :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{k_m \sin\phi}}\ .$$

Numériquement, on trouve :

$$k_m = 452\ \text{m}^{-1}, \quad \Phi = 0{,}8° \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\delta = 16\ \text{cm}}.$$

Ainsi, l'onde pénètre jusqu'à une profondeur de quelques 16 cm dans le milieu. Un aliment de cette taille, placé dans un four à micro-ondes, ressentira l'effet de l'onde électromagnétique. L'énergie électromagnétique dissipée dans l'aliment sert alors à chauffer ce dernier.

Copyrighted material

Exercices de niveau 3

Exercice 7

1) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - e(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v}\wedge\vec{\mathrm{B}}_0).$$

Dans cette relation, on néglige l'influence des frottements, ainsi que l'effet magnétique de l'onde devant l'effet électrique.

Les électrons étant non relativistes, on a $\dfrac{\|\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{B}}\|}{\|\vec{\mathrm{E}}\|} = \dfrac{v}{c} << 1$, $\vec{\mathrm{B}}$ étant le champ de l'onde.

2) En représentation complexe, la relation précédente s'écrit, sous forme vectorielle :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\vec{r}} = -\frac{e}{m}(\vec{\mathrm{E}} + j\omega\underline{\vec{r}}\wedge\vec{\mathrm{B}}_0).$$

Le vecteur polarisation $\underline{\vec{\mathrm{P}}}$ en représentation complexe est donné par :

$$\underline{\vec{\mathrm{P}}} = -\mathrm{N}e\underline{\vec{r}},$$

d'où, en multipliant par (– Ne) :

$$\boxed{(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\vec{\mathrm{P}}} = \frac{\mathrm{N}e^2}{m}\underline{\vec{\mathrm{E}}} - j\omega\underline{\vec{\mathrm{P}}}\wedge\left(\frac{e\vec{\mathrm{B}}_0}{m}\right)}$$

3) Si $\vec{\mathrm{B}}_0 = \vec{0}$, la relation précédente donne :

$$\underline{\vec{\mathrm{P}}} = \frac{\dfrac{\mathrm{N}e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

de la forme $\underline{\vec{\mathrm{P}}} = \varepsilon_0\chi_0\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}$. D'où :

$$\boxed{\chi_0(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad \text{en introduisant} \quad \omega_p^2 = \frac{\mathrm{N}e^2}{\varepsilon_0 m}.$$

4) a. On pose : $\underline{\vec{\mathrm{P}}} = \underline{\vec{\mathrm{P}}}_x\vec{u}_x + \underline{\vec{\mathrm{P}}}_y\vec{u}_y + \underline{\vec{\mathrm{P}}}_z\vec{u}_z$.

On a alors : $\underline{\vec{\mathrm{P}}}\wedge\vec{u}_z = \underline{\vec{\mathrm{P}}}_y\vec{u}_x - \underline{\vec{\mathrm{P}}}_x\vec{u}_y$

de sorte que la relation établie à la question 2 s'écrit :

$$\begin{cases}(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\mathrm{P}}_x = \varepsilon_0\omega_p^2\underline{\mathrm{E}}_x - j\omega\omega_c\underline{\mathrm{P}}_y\\ (\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\mathrm{P}}_y = \varepsilon_0\omega_p^2\underline{\mathrm{E}}_y - j\omega\omega_c\underline{\mathrm{P}}_x\\ (\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\mathrm{P}}_z = \varepsilon_0\omega_p^2\underline{\mathrm{E}}_z\end{cases}$$

La dernière équation donne immédiatement :

$$\underline{\mathrm{P}}_z = \varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\underline{\mathrm{E}}_z = \varepsilon_0\chi_0(\omega)\underline{\mathrm{E}}_z.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Pour une onde circulaire gauche, on aurait en $z = 0$:

$$\underline{\vec{E}}_+(z=0,t) = E_m e^{j\omega t}(\vec{u}_x - j\vec{u}_y).$$

On peut ainsi écrire :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}}_+ + \underline{\vec{E}}_-)}$$

L'onde incidente polarisée rectilignement est une combinaison linéaire de deux ondes polarisées circulairement. En utilisant les résultats précédents, on peut écrire, pour $0 \leqslant z \leqslant L$:

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_-(z,t) = E_m e^{j(\omega t - k_- z)}(\vec{u}_x + j\vec{u}_y) \\ \underline{\vec{E}}_+(z,t) = E_m e^{j(\omega t - k_+ z)}(\vec{u}_x - j\vec{u}_y) \end{cases}$$

de sorte que :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \frac{E_m}{2} e^{j\omega t}[e^{-jk_- z}(\vec{u}_x + j\vec{u}_y) + e^{-jk_+ z}(\vec{u}_x - j\vec{u}_y)].$$

Posons $k_m = \dfrac{k_+ + k_-}{2}$ et $K = \dfrac{k_+ - k_-}{2}$. Alors :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \frac{E_m}{2} e^{j(\omega t - k_m z)}\left[e^{-jKz}(\vec{u}_x - j\vec{u}_y) + e^{jKz}(\vec{u}_x + j\vec{u}_y)\right].$$

Finalement :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(z,t) = E_m e^{j(\omega t - k_m z)}\left[\cos(Kz)\vec{u}_x - \sin(Kz)\vec{u}_y\right]}$$

b. En tout point du diélectrique, c'est-à-dire pour z fixé, le vecteur $\cos(Kz)\vec{u}_x - \sin(Kz)\vec{u}_y$ est fixe.

La polarisation est donc rectiligne. Cependant, elle évolue avec z. À la sortie du milieu, la polarisation a tourné d'un angle $\theta = KL$ par rapport à la polarisation en $z = 0$, soit :

$$\boxed{\theta = \frac{\omega L}{2c}(n_+ - n_-)}$$

c. Avec les valeurs proposées, on a :

$\omega_p = 1{,}4\cdot10^{16}$ rad·s^{-1} ; $\omega_c = 1{,}8\cdot10^{11}$ rad·s^{-1} ; $\chi_0(\omega) = 2{,}2$; $u = 6{,}4\cdot10^{-6}$; $\chi(\omega) = 2{,}2$; $g(\omega) = 1{,}4\cdot10^{-5}$.

On a donc : $g \ll 1 + \chi$, de sorte que :

$$\begin{cases} n_+ \approx \sqrt{1+\chi}\left(1 + \dfrac{g}{2(1+\chi)}\right) \\ n_- \approx \sqrt{1+\chi}\left(1 - \dfrac{g}{2(1+x)}\right) \end{cases}$$

Avec une valeur moyenne d'indice :

$$n_m = \frac{n_+ + n_-}{2} = \sqrt{1+\chi},$$

il vient :

$$n_+ - n_- = \frac{g}{\sqrt{1+\chi}}, \quad \text{soit :} \quad \boxed{n_+ - n_- = \frac{g}{n_m}}.$$

d. Ainsi, on trouve finalement l'expression littérale :

$$\boxed{\theta \approx \frac{g\omega L}{2n_m c}}, \text{ expression de la forme } VLB_0 \text{ avec : } \boxed{V = \frac{g\omega}{2cB_0 n_m}}$$

Copyrighted material

Index

A-B

Absorption, 137
Adaptation d'impédances, 65
Approximation acoustique, 52
ARQS, 95

C

Chaîne d'oscillateurs, 6
Champ électrique, 94, 102
Champ magnétique, 94, 102
Coefficient
- **de réflexion**, 65, 66, 147, 148
- **de transmission**, 65, 66, 147, 148

Conditions aux limites, 16, 65
Conditions initiales, 16
Conservation
- **de la masse**, 53
- **de l'énergie**, 60

Corde
- **vibrante**, 8, 16
- **de Melde**, 19

D

Densité de courant d'énergie, 59
Densité volumique d'énergie, 60, 99
Diélectrique, 186
Diffusion, 104
- **Rayleigh**, 105
- **(polarisation par)**, 107

Dipôle oscillant, 100
Dispersion, 136, 143
DLHI, 189

E

Effet de peau, 150
Électron élastiquement lié, 104, 189
Équation d'Euler, 53
Équation de d'Alembert, 7, 55, 95
- **(solution générale)**, 11

Équations de couplage, 54, 94, 191
Équations de Maxwell, 94

H-I

Hypothèse adiabatique, 53
Impédance acoustique, 57
Indice
- **complexe**, 193
- **d'extinction**, 137, 193
- **optique**, 136, 193

L-M-N

Lois de Descartes, 146, 147
Longueur d'onde, 13
Mode propre, 16
Nœud, 15

O-P-Q

Onde
- **longitudinale**, 8, 57
- **plane**, 12
- **progressive**, 10, 11
- **stationnaire**, 14, 61
- **sonore**, 52
- **transversale**, 96

OPPH, 12, 56, 96
Paquet d'ondes, 139
Période, 13
Perméabilité du vide, 94
Permittivité
- **du vide**, 94
- **relative**, 193

Plasma, 134
Polarisation, 97
- **circulaire**, 98
- **elliptique**, 98
- **rectiligne**, 98

Principe de superposition, 9
Profondeur de pénétration, 137
Propagation d'une onde, 7
Puissance acoustique, 59

R-S

Relation de dispersion, 12, 135, 192
Relations de passage, 145
Représentation complexe, 13
Résonance, 20
Séparation des variables (méthode de), 14
Surpression, 52
Susceptibilité, 189

T-U-V

Vecteur d'onde, 12
Vecteur de polarisation, 186
Vecteur de Poynting, 99
Ventre, 15
Vitesse
- **de phase**, 138
- **de groupe**, 140

W-X-Y-Z

Zone
- **d'absorption**, 191, 195
- **de rayonnement**, 100
- **de transparence**, 191, 195

Imprimé en France par l'Imprimerie Moderne de l'Est 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal : août 2004 - 209 0363/01
N° imprimeur : 17636

Copyrighted material

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

L'épreuve littéraire



En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.



20 dissertations analysées et corrigées

Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.



Connaissance d'une œuvre

Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

La philothèque



Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices



Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand ***(Journ'allemand Vocabulaire et exercices)*****, en espagnol** ***(Journal'isimo Vocabulaire et exercices)*** **et en italien** ***(Journal'italien).***



Fort en thème - Fort en version

Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site :
www.editions-breal.fr

Copyrighted material

Copyrighted material



Titres disponibles en deuxième année dans les filières PC et PSI...

En Mathématiques
- Analyse PC
- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PC
- Algèbre et géométrie PSI

En Chimie
- Chimie organique PC
- Thermodynamique-Matériaux PC
- Chimie PSI

Livres d'exercices
- Mathématiques PC-PSI
- Physique PC / Physique PSI

En Physique
- Optique MP-PC-PSI-PT
- Mécanique MP-PC
- Électromagnétisme PC-PSI
- Physique des ondes PC-PSI
- Thermodynamique PC-PSI
- Mécanique des fluides PC-PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0363
ISBN : 2 7495 0401 5
www.editions-breal.fr

9 782749 504018

Copyrighted material